جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الأول

الزراعي / الفنون التطبيقية

المؤلفون

د. فوزي عبدالحسين العبيدي — **د. أياد غازي ناصر** — **فؤاد عبدالحميد عبدالمجيد**

محمد عبد الغفور الجواهري — **ثائر عبد العباس مطشر** — **مهند عبد الحمزة مرزا**

نظير حسن علي

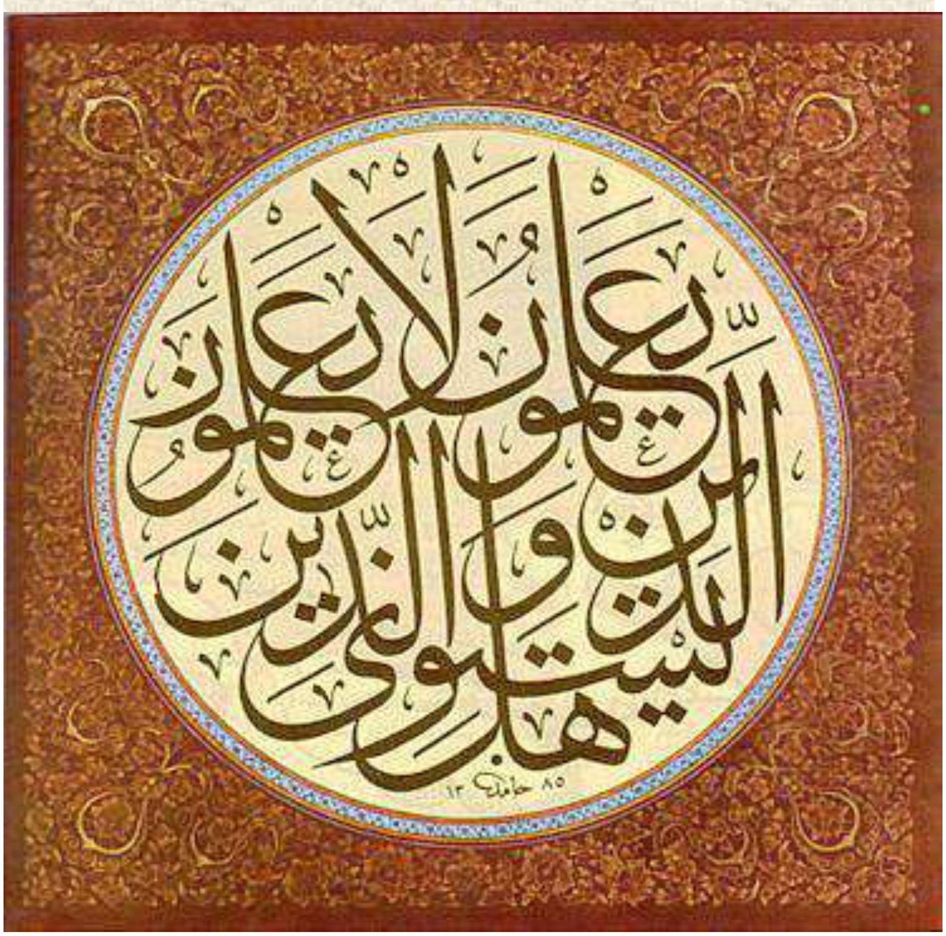
الطبعة السادسة

1447هـ - 2025م

عزيزي الطالب ...

هذا الكتاب هو المعين الاساسي لك في مسيرتك الدراسية والحفاظ عليه من التلف والتمزق يتيح لغيرك من الطلبة الاستفادة منه ويحافظ على الموارد المالية لبلدك من الهدر ....


بسم الله الرحمن الرحيم


هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون

المقدمة

تهتم المديرية العامة للتعليم المهني منذ مدة ليست ببعيدة بإعادة النظر في الكتب المنهجية بهدف تطويرها وتعديلها أو استبدالها لتتماشى مع المستوى المتصاعد للمناهج في أرجاء المعمورة عامة.

وقد باشرت شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بخطوة إيجابية باتجاه التكامل مع التجارب الدولية المتقدمة في المناهج الحديثة .وقد تمثلت الخطوة هذه بإعادة تأليف كتاب الرياضيات لغالبية فروع التعليم المهني ليسهم الكتاب الجديد في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة لا بنائنا الطلبة بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد وبالاستعانة بالتطبيقات والجداول والاشكال التي تدعم عملية اكتساب المهارات هذه.

وقد عملنا عند وضع الاهداف السلوكية لتدريس علم الرياضيات لفرع التعليم الزراعي أن تكون المفاهيم الرياضية معروضة في المنهج بطريقة مبسطة وباستخدام عبارات سهلة وأمثلة بسيطة وقابلة للاستيعاب دون الشعور بالملل أو الإرهاق من صعوبة وجدية المادة الرياضية .

يقول الرياضي والمربي اليوغسلافي الشهير(زلاتكاشبورير *Zlatka Shporer*) في كتابـــه ((الرياضيات في حياتنا)) ((لقد أصبحت الكتب المدرسية أكثر تجريداً ولذلك علينا استخدام طريقة المسلمات الأساسية في عرض المفاهيم الرياضية)) كما يقول ((من أجل الرياضيات ليس من الضروري أن تكون مبتذلاً... ومن أجل العرض المبسط لا توجد ضرورة لتفسير كل شي بسيط ... كما إن المدخل الجدي في الرياضيات يجب أن لا يكون مملاً بالضرورة)) . لذلك فقد عملنا على ألا نضع في متن كتابنا هذا براهيناً مطولة أو وصفاً موسعاً للبنية الرياضية التي تضمنها الكتاب ، كما أن التكرارات الكثيرة للأمثلة في الكتاب مع المراجعة المستمرة إلى ما سبق وأن تم دراسته في المراحل السابقة وإضافة شيء جديد له لا يعد نقصاً في الكتاب بل نعده من أهم محاسنه.

الكتاب هذا هو الكتاب الأول من كتابين تم إعدادهما لطلبة المدارس الزراعية ويتكون من خمسة فصول تبدأ بالفصل الأول الذي يتناول المعادلات الرياضية وطرق حلها، أما الفصل الثاني فأنه يتناول الدوال الحقيقية وتمثيلها بيانياً فضلاً عن تناول مفهوم التغير بشكل مفصل . أما الفصل الثالث والذي يتناول حساب المثلثات فقد تم أضافة بند خاص معزز بالصور التوضيحية لاستخدام الحاسبة في أيجاد قيم النسب المثلثية وبذلك نكون قد سجلنا لكتابنا هذا السبق الاول حيث لم يسبق لكتاب منهجي في علم

الرياضيات أو غيره أن أستخدم هذا الاسلوب المبتكر في إيصال المعلومة فضلاً عن تعزيز المسائل العملية التي وضعت لتوضيح مفهوم زاويتي الارتفاع والانخفاض بصور حقيقية من الطبيعة لتقرب المفهوم بشكل حقيقي إلى ذهن الطالب.

أما الفصل الرابع الذي يبحث في الهندسة الإحداثية فلقد تم تخصيصه لتعميق المفاهيم المتعلقة بالخط المستقيم في المستوى الاحداثي ، كما راعينا في الفصل الخامس علم الإحصاء بتتابع منسق يتيح للطالب تلمس طبيعة هذا العلم وأدراك ماهية البيانات الإحصائية وأساليب جمع وعرض البيانات. وهنا لا بد من الأشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل حصتين لكل أسبوع وما مجموعه (25 أسبوعاً) .

الفصل الاول	**خمسة أسابيع**
الفصل الثاني	**خمسة أسابيع**
الفصل الثالث	**خمسة أسابيع**
الفصل الرابع	**خمسة أسابيع**
الفصل الخامس	**خمسة أسابيع**

وختاما" نستشهد بالمقولة الشهيرة للعماد الأصفهاني حيث يقول ((إني رأيت أنه لا يكتب أنسان كتاباً في يومه إلا قال في غده : لو غير هذا لكان أحسن، ولو زيد كذا لكان يستحسن ، ولو قدم هذا لكان أفضل ، ولو ترك هذا لكان أجمل ، وهذا من أعظم العبر للإنسان ، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر)).
آملين من إخواننا المدرسين أن يوافوننا ملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق .

المؤلفون

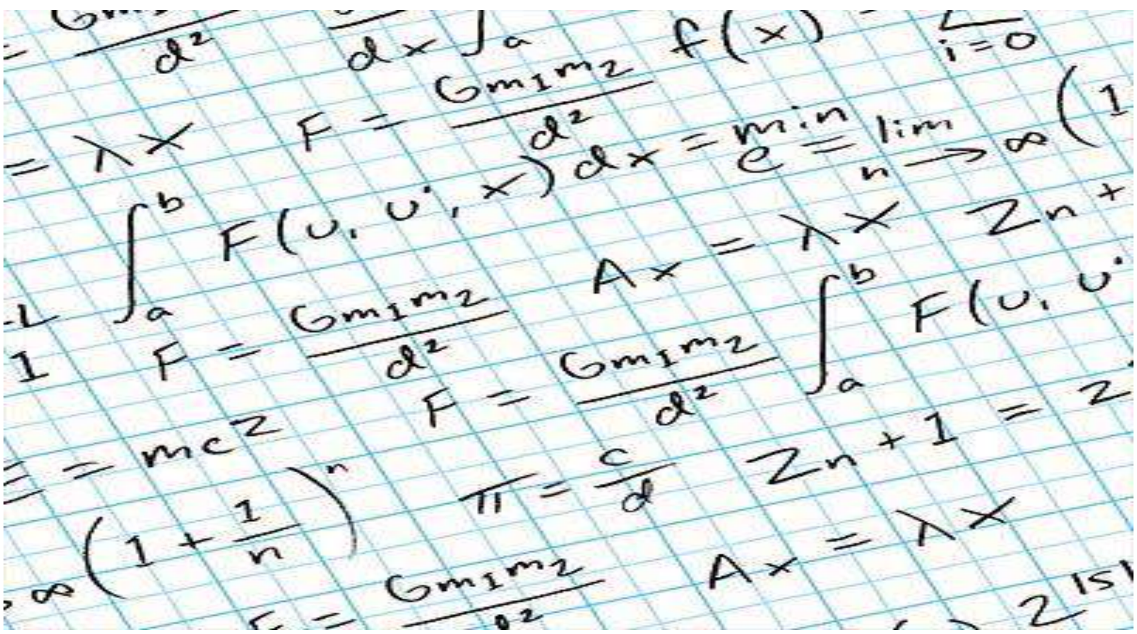
من أراد أن يختبر عقله فعليه بالرياضيات... ومن أراد أن ينميه فعليه بالرياضيات ... ومن أراد أن يصقل ذكاءه وموهبته فعليه بالرياضيات .

بعض المختصرات والرموز المستخدمة في الكتاب

1. $L.H.S = left\ hand\ side$: الطرف الايسر
2. $R.H.S = right\ hand\ side$:الطرف الايمن
3. $S.s = Solution\ set$:مجموعة الحل
4. $(x - axis)$:المحور الافقي
5. $(y - axis)$:المحور العمودي
6. $\mathbb{R}$:مجموعة الاعداد الحقيقية
7. $\mathbb{Q}$:مجموعة الاعداد النسبية
8. $\mathbb{Z}$:مجموعة الاعداد الصحيحة
9. $\mathbb{N}$: مجموعة الاعداد الطبيعية
10. ϕ: مجموعة خالية
11. $\forall$:لكل
12. $\exists$:يوجد على الاقل
13. $\in$: ينتمي
14. $\ni$: بحيث

الفهرس


الفصل الاول
المعادلات



الأهداف السلوكية:

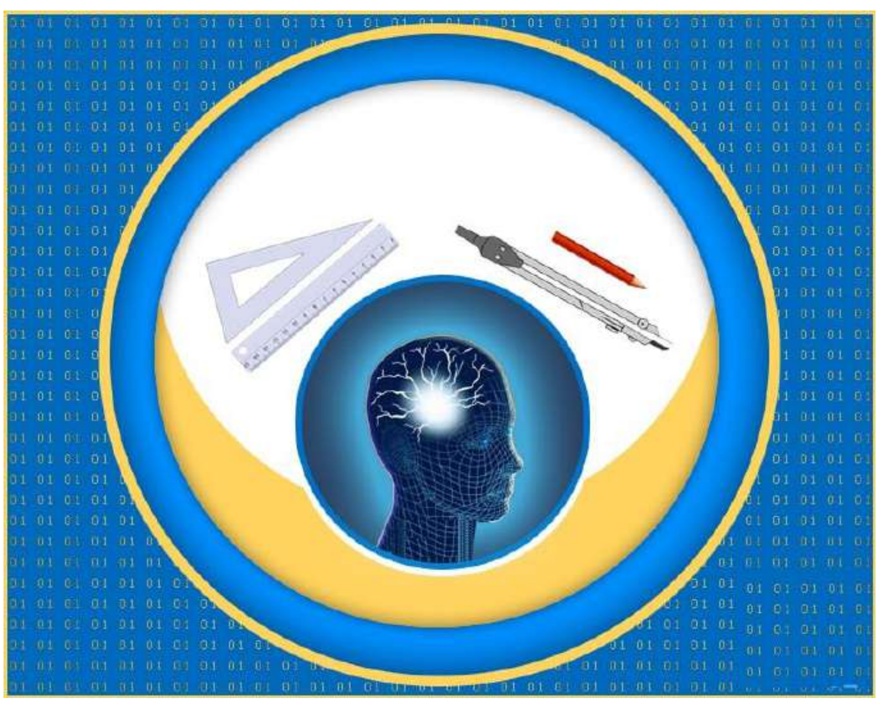
يجب على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يستطيع: -

1. **إدراك مفهوم الفترة ويتعرف على انواعها ويستطيع تمثيلها على خط الأعداد.**
2. **إدراك مفهوم المجموعات العددية ويستطيع تمثيلها على خط الأعداد.**
3. **تمييز المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين ويستطيع إيجاد مجموعة حلها.**
4. **إيجاد مجموعة حل زوج من المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين.**
5. **تمييز المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد ويستطيع إيجاد مجموعة حلها.**
6. **إتقان طرائق إيجاد مجموعة الحل للمعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد وهي (التحليل إلى العوامل – إكمال المربع - الدستور).**
7. **إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلم جذراها .**

الفصل الاول

المعادلات

(1-1) الفترة.
(2-1) مجموعات عددية غير محددة.
(3-1) القيمة المطلقة للعدد الحقيقي.
(4-1) المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين.
(1-4-1) إيجاد مجموعة حل المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين.
(2-4-1) إيجاد مجموعة حل زوج من المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين.
(5-1) المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد.
(1-5-1) طريقة التحليل إلى العوامل.
(2-5-1) طريقة اكمال المربع.
(3-5-1) طريقة القانون (الدستور).
(4-5-1) إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها.



الفصل الاول

المعادلات *(Equations)*

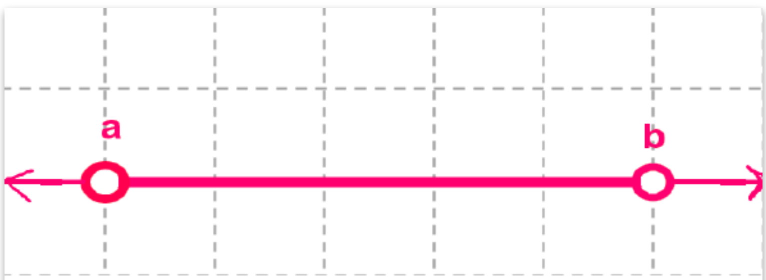
(1-1) الفترة *(Interval):*

هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وتكون بثلاث صيغ هي :-

1. الفترة المفتوحة $(\mathrm{a,b})$ (*Open Interval*) وتعرّف كما يلي :-

$$(a,b)=\{x : a < x < b\}$$

وتمثل هندسياً على الخط الأحداثي كالاتي :-

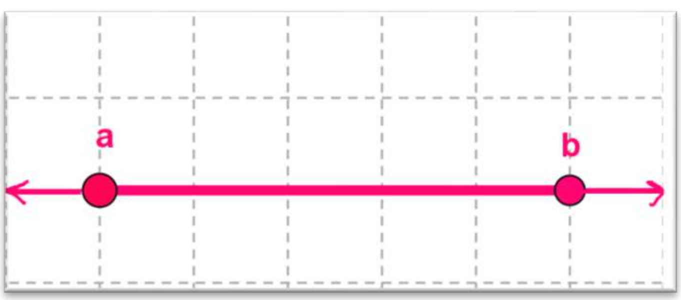


حيث $b \notin (a,b)$, $a \notin (a,b)$ أي إنها مجموعة كل النقاط الواقعة بين النقطتين a, b دون أن تكون هاتين النقطتين من ضمنها .

2. الفترة المغلقة $[a,\mathrm{b}]$ *(Closed Interval)* وتعرّف كما يلي :-

$$[a,b]=\{x : a \le x \le b\}$$

وتمثل هندسياً على الخط الاحداثي كالاتي :-



حيث $b \in [a,b]$, $a \in [a,b]$ أي إنها مجموعة كل النقاط الواقعة بين النقطتين a , b وبضمنها النقطتين a , b.

3. الفترة نصف المفتوحة أو نصف المغلقة وهي بصيغتين

❖ **مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين وتعرّف كما يلي**

$$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$$

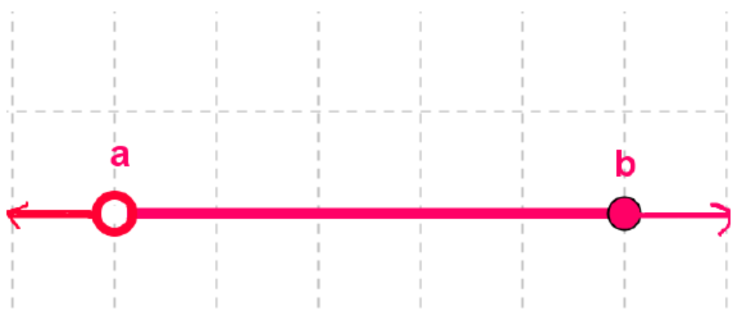
وتمثل هندسياً على الخط الأحداثي كالاتي :-

حيث $[a, b) \not\ni b$ **,** $a \in [a, b)$ **اي انها مجموعة كل النقاط الواقعة بين النقطتين** a , b **وبضمنها نقطة** a **فقط .**

❖ **مغلقة من اليمين ومفتوحة من اليسار وتعرّف كما يلي**

$$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$$

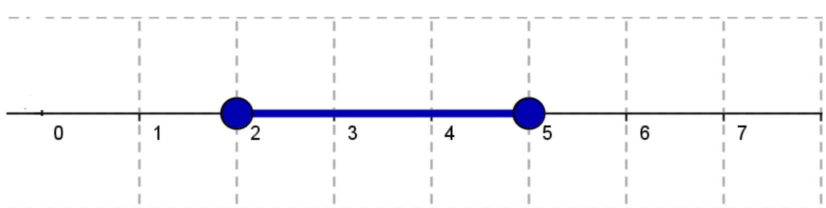
وتمثل هندسياً على الخط الاحداثي كالاتي :-



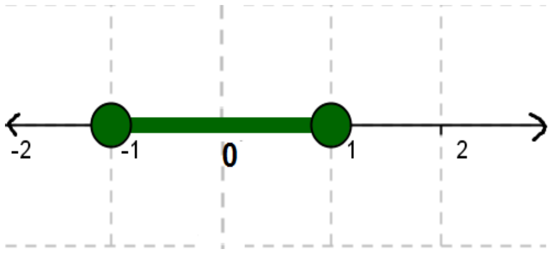
حيث $a \notin (a, b]$ **,** $b \in (a, b]$ **اي انها مجموعة كل النقاط الواقعة بين النقطتين** a , b **وبضمنها نقطة** b **فقط .**

مثال 1:-

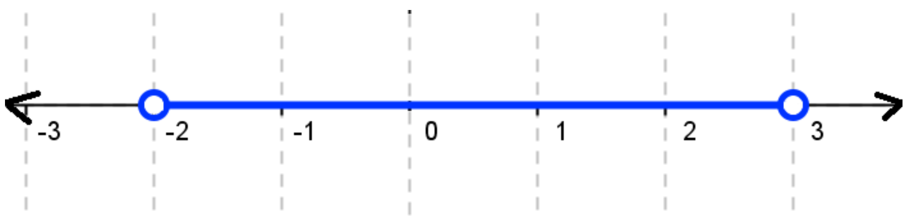
✓ **لاحظ الفترة المغلقة** $[2, 5]$ **وهي تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية** x **حيث** $2 \le x \le 5$
وتمثل بيانياً كما في الشكل المجاور:-



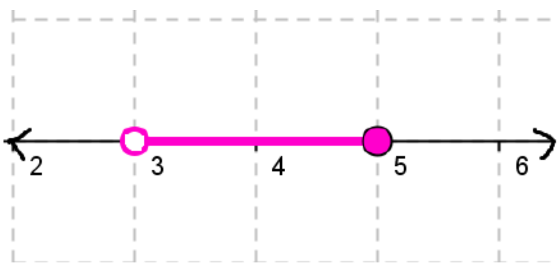
✓ لاحظ الفترة المغلقة$[-1,1]$وهي تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-1 \le x \le 1$ وتمثل بيانياً كما في الشكل المجاور:-



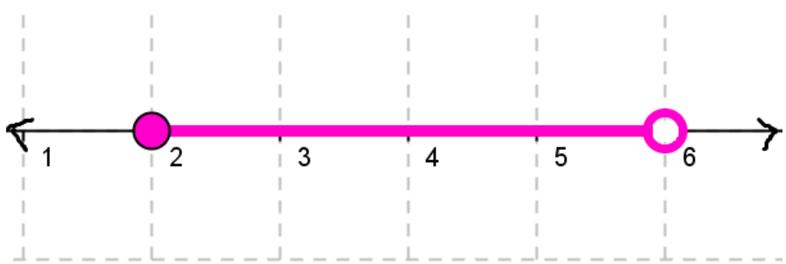
✓ لاحظ الفترة المفتوحة $(-2,3)$ وهي تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-2 < x < 3$ وتمثل بيانياً كالاتي :-



✓ لاحظ الفترة نصف المفتوحة $(3,5]$ وهي تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $3 < x \le 5$ وتمثل بيانياً كالاتي:-



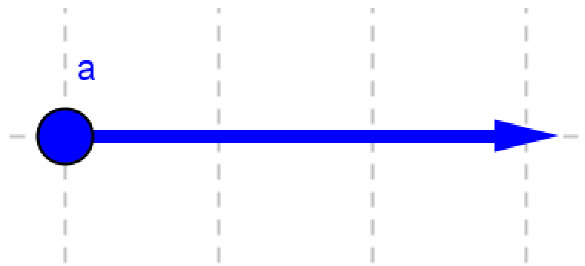
✓ لاحظ الفترة نصف المفتوحة $[2,6)$ وهي تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية حيث $2 \le x < 6$ وتمثل بيانياً كالاتي :-



(2-1) مجموعات عددية غير محددة : وتكون بأربع صيغ هي:-

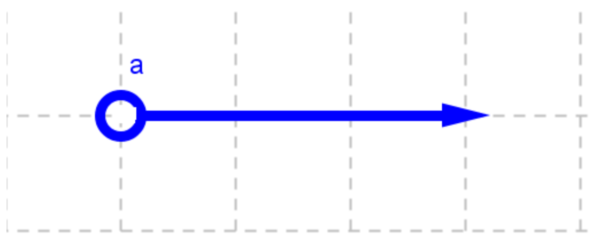
1. مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن قيمة العدد الحقيقي a أو تساويه

وتعرف كما يلي :- $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$ وتمثل بيانياً كالاتي :-



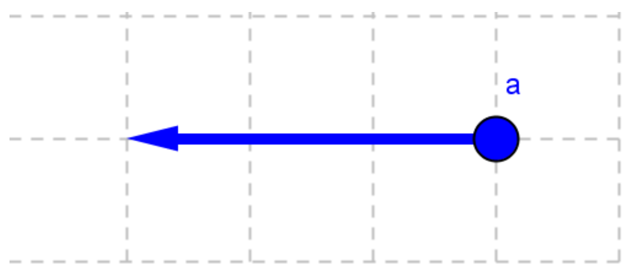
2. مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن قيمة العدد الحقيقي a ولا تساويه

وتعرف كما يلي : $\{x : x \in \mathbb{R}, x > a\}$ وتمثل بيانياً كالاتي :-



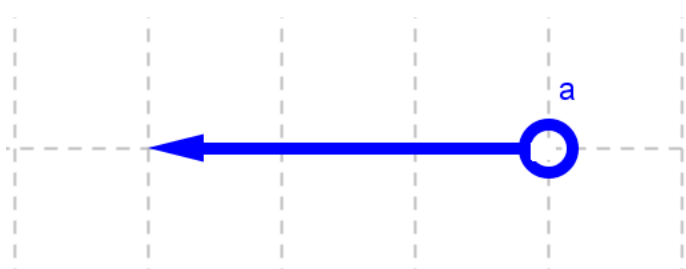
3. مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن قيمة العدد الحقيقي a أو تساويه

وتعرف كما يلي :- $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$ وتمثل بيانياً كالاتي :-



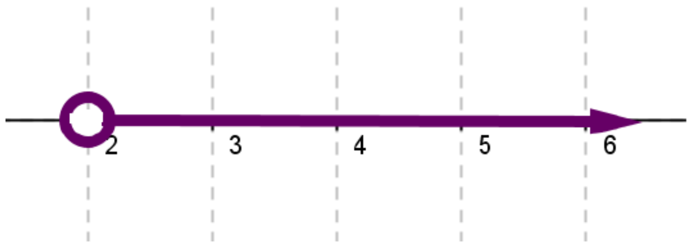
4. مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن قيمة العدد الحقيقي a ولا تساويه

وتعرف كما يلي :- $\{x : x \in \mathbb{R}, x < a\}$ وتمثل بيانياً كالاتي :-

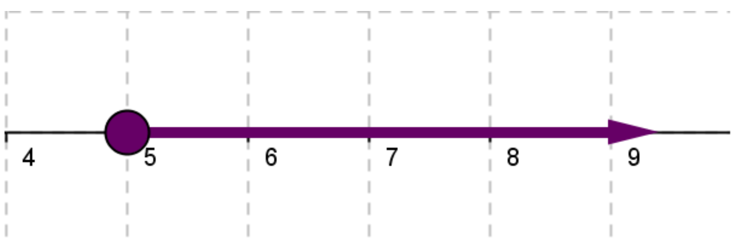


مثال 2:-

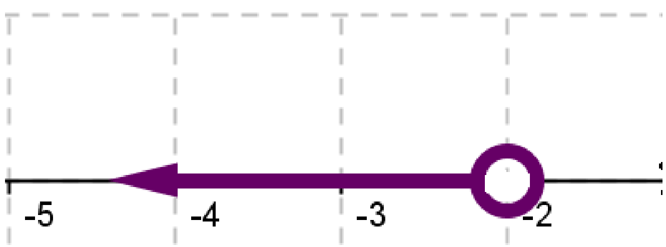
- ✓ **إن مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x > 2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة عند النقطة $x = 2$ وكما موضح أدناه:-**



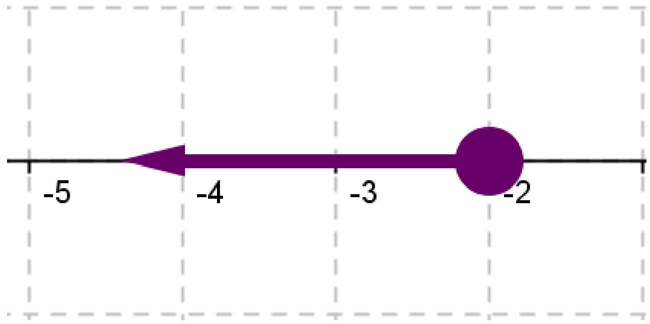
- ✓ **ان مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \geq 5$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة مملوءة عند النقطة $x = 5$ وكما موضح أدناه:-**



- ✓ **ان مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x < -2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة عند النقطة $x = -2$ وكما موضح أدناه:-**



- ✓ **ان مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \leq -2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة مملوءة عند النقطة $x = -2$ وكما موضح أدناه:-**



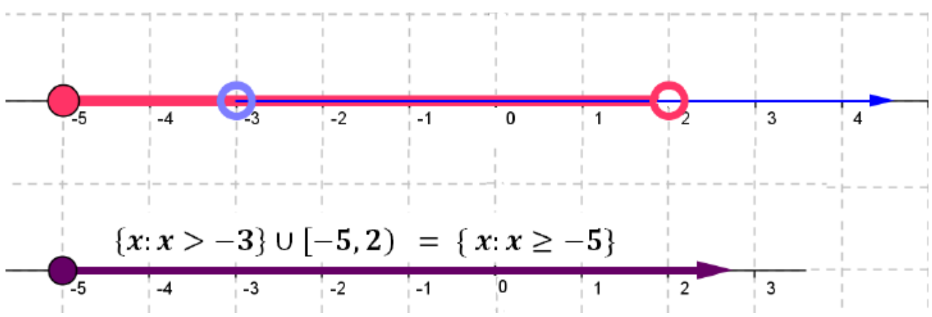
مثال 3:- مثل على خط الأعداد كلاً مما يأتي :-

a) $\{x: x > -3\} \cup [-5, 2)$

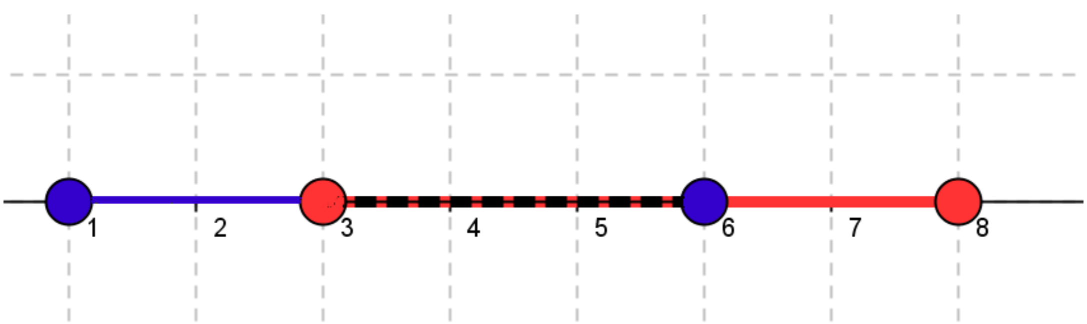
b) $[3, 8] \cap [1, 6]$

الحل:-

a) $\{x: x > -3\} \cup [-5, 2) \;=\; \{x: x \geq -5\}$



b) $[3, 8] \cap [1, 6] = [3, 6]$



(3-1) القيمة المطلقة للعدد الحقيقي (*Absolute value*)

تعرّف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x بأنها عدد حقيقي له قيمة العدد x نفسه عندما يكون موجباً أو صفراً، فيما يساوي $(-x)$ عندما يكون سالباً ، ويرمز لمطلق العدد x بالرمز $|x|$ ، أي إن

$$|x| = \begin{cases} x & \forall\, x > 0 \\ 0 & ,\quad x = 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي هي دائماً عدد غير سالب كما يتضح ذلك بالمثال الآتي :-

مثال 4:-لاحظ الأمثلة العددية الآتية :-

1. $|-6| = 6$
2. $|4| = 4$
3. $\left|-1\frac{1}{2}\right| = 1\frac{1}{2}$
4. $|5-8| = |-3| = 3$
5. $|0-0| = |0| = 0$

مثال 5:-عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة عن المقدار الجبري $|x-3|$ حيث $x \in \mathbb{R}$

الحل:-

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \forall\; x-3 > 0 \\ 0 & ,\quad x-3 = 0 \\ -(x-3) & \forall\; x-3 < 0 \end{cases}$$

ومنها نحصل على

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \forall\, x > 3 \\ 0 & ,\quad x = 3 \\ 3-x & \forall\, x < 3 \end{cases}$$

نستنتج من التعريف $(3\text{-}1)$ أن للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي x الخواص الآتية :-

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ |x| \geq 0$

أي إن القيمة المطلقة موجبة دائماً

مثال :- $-5 \in \mathbb{R}\,, |-5| = 5 > 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}\,, |x| = |-x|$

مثال :- $|-9| = |9| = 9$

3. $\forall x \in \mathbb{R}\,, -|x| \leq x \leq |x|$

مثال :- $-|6| = -6 \ \ , |6| = 6$

ومنه نستنتج أن $-|6| \leq 6 \leq |6|$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = |x|^2$

مثال :- $(-3)^2 = 9 \ \ , |-3|^2 = 9$

ومنه نستنتج أن $(-3)^2 = |-3|^2$

5. $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, |x.y| = |x|.|y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ , y \neq 0$

مثال :- إذا كانت $x = 3 \ \ , y = -5$

$L.H.S = |x.y| = |3.(-5)| = |-15| = 15$

$R.H.S = |x|.|y| = |3|.|-5| = 3.5 = 15$

$\therefore\ |x.y| = |x|.|y|$

6. $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, |x - y| \geq |x| - |y|$

مثال :- إذا كانت $y=7$, $x=-3$ فإن

$L.H.S = |x - y| = |-3 - 7| = |-10| = 10$

$R.H.S = |x| - |y| = |-3| - |7| = 3 - 7 = -4$

أي أن $|-3 - 7| > |-3| - |7|$

7. $\forall x \in \mathbb{R}\,, |x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq +a$

مثال:- إذا كانت $x= 10$, $a=12$ فإن

$|10| < 12 \Rightarrow -12 < 10 < +12$

مثال:- إذا كانت $x=-5$, $a=6$ فإن

$|-5| < 6 \Rightarrow -6 < -5 < +6$

8. $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, |x + y| \leq |x| + |y|$

مثال :- إذا كانت $x = 3\ ,\ y = 5$ فإن

$L.H.S = |x + y| = \ |3 + 5| = |8| = 8$

$R.H.S = |x| + |y| = |3| + |5| = 8$

$\therefore\ |3 + 5| = |3| + |5|$

مثال:- إذا كانت $x = 3, \quad y = -5$ فإن

$$L.H.S = |x + y| = |3 + (-5)| = |3 - 5| = |-2| = 2$$

$$R.H.S = |x| + |y| = |3| + |-5| = 3 + 5 = 8$$

$$\therefore |3 + 5| < |3| + |-5|$$

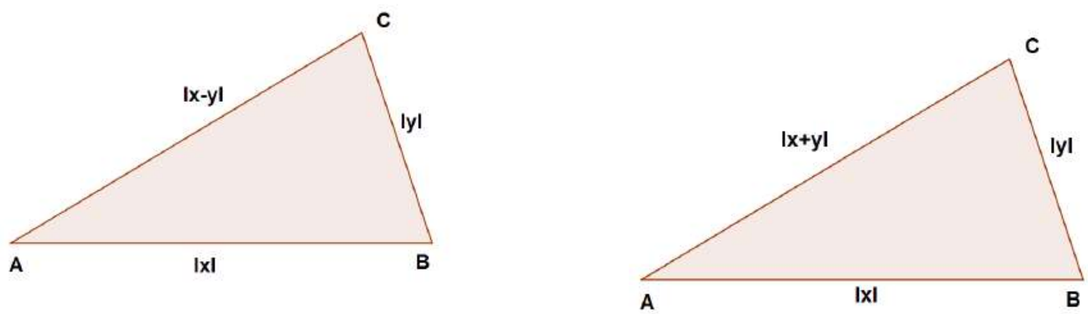
مثال :- إذا كانت $x = -5, y = 7$ فإن

$$L.H.S = |x + y| = |-5 + 7| = |2| = 2$$

$$R.H.S = |x| + |y| = |-5| + |7| = 5 + 7 = 12$$

$$\therefore |-5 + 7| < |-5| + |7|$$

وتسمى الخاصية(8) بخاصية المثلث فهي تتطابق مع النتيجة التي تنص على أن مجموع طول أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث وكما موضح في الشكل أدناه ، كما ان الفرق بين طول أي ضلعين في مثلث أصغر من طول الضلع الثالث وهذا يتطابق مع الخاصية (6) .



ملاحظة:- هنا $|x + y|$ لا تساوي طول الضلع $\overline{AC}$ فعلاً وانما هو رمز فقط لتقريب الفكرة لذهن الطالب وكذلك الحال بالنسبة إلى $|x - y|$ والتي تمثل رمزاً فقط لطول الضلع $\overline{AC}$ في المثلث الثاني .

مثال 6:- حل المعادلة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية : $|x + 3| = 1$

الحل :

$$1)\ x + 3 = 1 \rightarrow x = 1 - 3 \rightarrow x = -2$$

$$2) - x - 3 = 1 \rightarrow -x = 1 + 3 \rightarrow -x = 4 \rightarrow x = -4$$

$$\therefore S.s = \{-2, -4\}$$

مثال 7:- حل المتباينة الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية : $|x+3|>1$

الحل :- $1)\ x+3>1 \rightarrow x>1-3 \rightarrow x>-2$

$2)-x-3>1 \rightarrow -x>1+3 \rightarrow -x>4 \rightarrow x<-4$

$$\therefore S.s=\{x: x>-2\} \cup \{x: x<-4\}=\mathbb{R}/(-4,-2)$$

تمارين (1-1)

1. أكتب خمسة عناصر تنتمي إلى كل من الفترات الآتية :-

$[\frac{1}{4},\frac{1}{2}),[0,1]\ ,(1,2]\ ,[5,7),(3,4),(-10,-6],(-1,\frac{1}{2}]$

2. باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي . جد قيمة ما يلي :-

$|\sqrt{3}|-5\quad ,|-\sqrt{2}|\ ,\quad \left|\frac{3}{7}\right|\ ,|-3|$

3. لتكن $A=[-3,1],B=[-1,2]$. جد ناتج ما يلي $A\cup B$ ، $A\cap B$ على شكل فترات حقيقية ومثلها على خط الأعداد الحقيقية .

4. جد ناتج كلاً مما يأتي:-

a) $\{x: x\geq -1\}\cap[-3,2)$
b) $(-3,1]\cap\{x: x>2\}$
c) $(-2,3)\cup\{x: x<1\}$
d) $[-3,0]\cap(-2,3)$

5. حل المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية

a) $|2x-5|+12=15$
b) $|x+9|=24$
c) $|4+x|-2x=7-5x$

6. حل المتباينات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية

a) $|2x-5|<13$
b) $|9+3x|+12\geq 48$

(4-1) المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين

(1-4-1) إيجاد مجموعة حل المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين

قد درسنا في المرحلة المتوسطة المعادلة التي على الصورة $ax + by + c = 0$ حيث الثوابت a, b, c ليست أصفاراً وتنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وإن كلاً من x, y متغيران ينتميان أيضاً إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وتعلمنا أن حل هذه المعادلة يقتضي إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (x, y) والتي تحقق المعادلة حيث ان مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. أي إن مجموعة الحل لمعادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين هي مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صائبة.

مثال 8:- جد مجموعة حل المعادلة $3x + 2y = 9$ إذا كانت مجموعة التعويض لكل من المتغيرين x, y هي $\{3, 2, 1\}$.

الحل :- كما هو معلوم إن حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة التعويض هو :

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

وعند تعويض الزوج المرتب $(1,1)$ بالمعادلة ينتج $3.1 + 2.1 = 9$ وهي عبارة خاطئة وبذلك نستبعد الزوج المرتب $(1,1)$ من مجموعة حل المعادلة بينما الزوج المرتب $(1,3)$ يحقق المعادلة عند تعويضه فيها حيث ينتج $3.1 + 2.3 = 9$ وهي عبارة صائبة وبذلك نستنتج أن الزوج المرتب $(1,3)$ هو أحد حلول المعادلة ، وهكذا لو عوّضنا الأزواج المرتبة التالية :- $(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$ فأننا سنتوصل إلى أنها تؤدي إلى ظهور عبارة خاطئة . ومن ذلك نستنتج أن الزوج المرتب $(1,3)$ هو الحل الوحيد لهذه المعادلة أي إن مجموعة حل المعادلة والتي نرمز لها اختصارا $S.s$ (*Solution set*) هي :-

$$S.s = \{(1,3)\}$$

مثال 9:- جد مجموعة حل المعادلة $2x + y = 4$.

نلاحظ في المثال هذا عدم تحديد مجموعة تعويض، ولذلك سوف نقوم باختيار قيم عشوائية حقيقية (أي تنتمي إلى $\mathbb{R}$) لكل من المتغيرين x, y بحيث تتحقق المعادلة وسنجد أن الزوج المرتب $(0,4)$ يحقق المعادلة أي$(2.0 + 4 = 4)$ وهي عبارة صائبة لذلك فأننا نعتبر الزوج المرتب $(0,4)$ هو أحد حلول المعادلة ولكنه ليس الحل الوحيد لأننا نلاحظ أن الأزواج المرتبة الآتية تحقق المعادلة أيضاً

$$\left\{(1,2), (2,0), (-1,6), (-2,8), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \left(-\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}\right)\right\}$$

كما إنه يمكننا اختيار قيم عددية حقيقية أخرى للمتغير x واستخراج ما يقابلها من قيم للمتغير y عن طريق التعويض بالمعادلة$(y = 4 - 2x)$ لنحصل على ازواج مرتبة اخرى غير التي ذكرناها أعلاه تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة ... ولذلك فأنه من البديهي أن نستنتج أن مجموعة حل المعادلة هي

مجموعة غير منتهية من الأزواج المرتبة ، وإن المجموعة المذكورة أعلاه ما هي إلا مجموعة جزئية من مجموعة الحل .

استنتاج :

للمعادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين عدد غير منتهي من الحلول في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

[1-4-2] إيجاد مجموعة حل زوج من المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين

ان مجموعة الحل لزوج من المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين تحتوي أزواجاً مرتبة تحقق كلاً من المعادلتين في آن واحد ولذلك أطلق عليها تسمية (المعادلات الآنية)، وبلغة الرياضيات إذا طلبنا إيجاد مجموعة حل المعادلتين آنياً فإن المقصود هو إيجاد مجموعة التقاطع لمجموعتي الحل لكل معادلة من المعادلتين، وسوف نوضح ذلك كالاتي: -

لتكن

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$$
$$a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$$

معادلتان من الدرجة الأولى بمتغيرين. إن حل هاتين المعادلتين آنياً يستهدف إيجاد مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقق كلا المعادلتين في آن واحد ويتم ذلك عن طريق إيجاد مجموعة الحل لكل معادلة ومن ثم استخراج مجموعة تقاطعهما.

مثال 10:- لتكن $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعة التعويض لكل من المعادلتين الآتيتين:-

$$3x + y = 8$$
$$3x - y = 4$$

جد مجموعة حل هاتين المعادلتين.

الحل:-

كما مر بالمثال (8) نقوم بإيجاد مجموعة حل المعادلة الأولى وهي:-

$\{(2, 2), (1, 5)\}$ ومجموعة حل المعادلة الثانية وهي $\{(2, 2), (3, 5)\}$ وعليه تكون مجموعة التقاطع $\{(2, 2)\}$ هي مجموعة الحل للمعادلتين .

ملاحظة

إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ فإنه من الصعب بل من المستحيل ايجاد مجموعة الحل بالطريقة السابقة لذلك نستخدم إحدى الطريقتين الآتيتين :-

- الطريقة الجبرية وتشمل أسلوبين هما (أسلوب الحذف) و (أسلوب التعويض)
- الطريقة البيانية (أي استخدام المخطط البياني على ورق المربعات)

الطريقة الجبرية

1) أسلوب الحذف :- ويتلخص الاسلوب هذا بمساواة القيمة العددية لمعاملي أحد المتغيرين في كل من المعادلتين ثم جمع أو طرح إحداهما من الأخرى بهدف حذف أحد المتغيرين والامثلة الآتية توضح الاسلوب هذا:-

مثال 11:- جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :-

$$5x + 4y = 8 \quad \dots \quad (1)$$
$$3x - 2y = 7 \quad \dots \quad (2)$$

الحل :- بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد (2) نحصل على

$$5x + 4y = 8 \quad \dots \quad (1)$$
$$6x - 4y = 14 \quad \dots \quad (2)$$

وبجمع المعادلتين نحصل على

$$11x = 22$$
$$x = \frac{22}{11} \Rightarrow x = 2$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على

$$5.(2) + 4y = 8$$
$$10 + 4y = 8$$
$$4y = -2$$
$$y = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$S.s = \{(2, \tfrac{-1}{2})\}$$

مثال 12:- جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :-

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 3 \dots (1)$$
$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 1 \dots (2)$$

الحل :- بضرب طرفي المعادلة (1) بالعدد (2) نحصل على

$$\frac{4}{x} - \frac{2}{y} = 6 \quad \dots \quad (1)$$
$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

وبطرح المعادلتين نحصل على:

$$\frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على

$$\frac{2}{\frac{1}{5}} - \frac{1}{y} = 3$$

$$10 - \frac{1}{y} = 3$$

$$10 - 3 = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = 7$$

$$y = \frac{1}{7}$$

$$S.s = \left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)\right\}$$

2) أسلوب التعويض :- ويتلخص الاسلوب هذا بإيجاد القيمة العددية لأحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر من إحدى المعادلتين لنحصل على معادلة ثالثة نقوم بتعويضها بالمعادلة الأخرى ، يلي ذلك استخراج قيمة المتغير بطريقة عزل المتغيرات بجهة والثوابت بجهة ثانية ثم تعويض تلك القيمة بالمعادلة الثالثة بهدف إيجاد قيمة المتغير الثاني والأمثلة الآتية توضح الاسلوب هذا:-

مثال 13:- جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :-

$$4x - y = -5 \quad \dots (1)$$

$$8x + 5y = 32 \quad \dots (2)$$

الحل :- نستخرج قيمة y من المعادلة الأولى فنحصل على

$$y = 4x + 5 \quad \dots\dots\dots..(3)$$

ونعوض هذه القيمة بالمعادلة (2) لنحصل على قيمة x كما يلي :-

$$8x + 5(4x + 5) = 32$$

$$8x + 20x + 25 = 32$$

$$28x = 32 - 25$$

$$28x = 7$$

$$x = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

وبتعويض قيمة x بالمعادله (3) نحصل على

$$y = 4 \times \frac{1}{4} + 5 = 1 + 5 = 6$$

$$\therefore S.s = \left\{\left(\frac{1}{4}, 6\right)\right\}$$

مثال 14:- جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :-

$$2x - y = 4 \quad \dots (1)$$
$$4x - 2y = 10 \quad \dots (2)$$

الحل :- نستخرج قيمة y من المعادلة الأولى فنحصل على

$$y = 2x - 4$$

ونعوض القيمة هذه بالمعادلة (2) لنحصل على قيمة x كما يلي :-

$$4x - 2(2x - 4) = 10$$
$$4x - 4x + 8 = 10$$
$$8 = 10$$

وهي عبارة خاطئة وعليه يمكننا القول انه ليس لهاتين المعادلتين حل مشترك أي لا يوجد زوج مرتب يمكن أن يحققهما معاً في آن واحد ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالقول إن مجموعة الحل مجموعة خالية أي أن $S.s = \phi$

مثال 15:- جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:-

$$\frac{x + y}{2} = \frac{7x - 5y}{6} + \frac{x + 4}{4} \dots (1)$$
$$\frac{x - 6y}{2} = \frac{x - 2y}{7} + 4 \dots (2)$$

الحل :- نبسط كلتا المعادلتين بضرب طرفيهما بالمضاعف المشترك الأصغر لمقامات حدودهما ، وهما العدد 12 للمعادلة الأولى والعدد 14 للمعادلة الثانية لنحصل على :-

$$12 \times \frac{x + y}{2} = 12 \times \frac{7x - 5y}{6} + 12 \times \frac{x + 4}{4} \dots (1)$$
$$14 \times \frac{x - 6y}{2} = 14 \times \frac{x - 2y}{7} + 14 \times 4 \dots (2)$$

وبالتبسيط نحصل على

$$6(x + y) = 2(7x - 5y) + 3(x + 4) \dots (1)$$
$$7(x - 6y) = 2(x - 2y) + 56 \quad \dots (2)$$

ومن ثم

$$6x + 6y = 14x - 10y + 3x + 12 \quad \dots (1)$$
$$7x - 42y = 2x - 4y + 56 \quad \dots (2)$$

وأخيراً

$$-11x + 16y = 12 \quad \dots (1)$$
$$5x - 38y = 56 \quad \dots . (2)$$

نجد قيمة x من المعادلة (1) لنحصل على

$$x = \frac{16y - 12}{11} \dots (3)$$

والتي نعوضها بالمعادلة (2) فينتج عن ذلك:

$$5 \times \frac{16y - 12}{11} - 38y = 56$$

$$80y - 60 - 418y = 616$$

$$-338y = 676$$

$$y = \frac{676}{-338} = -2$$

وبتعويض قيمة y بالمعادلة (3) نحصل على قيمة x كما يلي :

$$x = \frac{16 \times (-2) - 12}{11} = \frac{-44}{11} = -4$$

$$S.s = \{(-4, -2)\}$$

مثال 16:- ما الكسر الذي إذا أضيف العدد (1) إلى بسطه يكون مساوياً للكسر $\frac{1}{3}$ وإذا أضيف العدد(1) إلى مقامه أصبح مساوياً للكسر $\frac{1}{4}$ ؟

الحل :- نفرض إن بسط الكسر هو x وإن مقامه هو y أي إن الكسر هو $\frac{x}{y}$

$$\frac{(x+1)}{y} = \frac{1}{3} \quad \dots \ (1)$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} \ \dots \ (2)$$

نبسط الطرفين باستخدام إحدى خواص التناسب وهي خاصية ((حاصل ضرب الطرفين= حاصل ضرب الوسطين))

$$y = 3x + 3 \ \Rightarrow \ \ y - 3x = 3 \quad \dots \ (1)$$

$$4x = y + 1 \Rightarrow \ \ -y + 4x = 1 \ \dots \ \ (2)$$

وبجمع المعادلتين نحصل على

$$x = 4$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على قيمة y كما يلي

$$\frac{4+1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$y = 15$$

لذلك فان الكسر المطلوب هو $\frac{4}{15}$

الطريقة البيانية

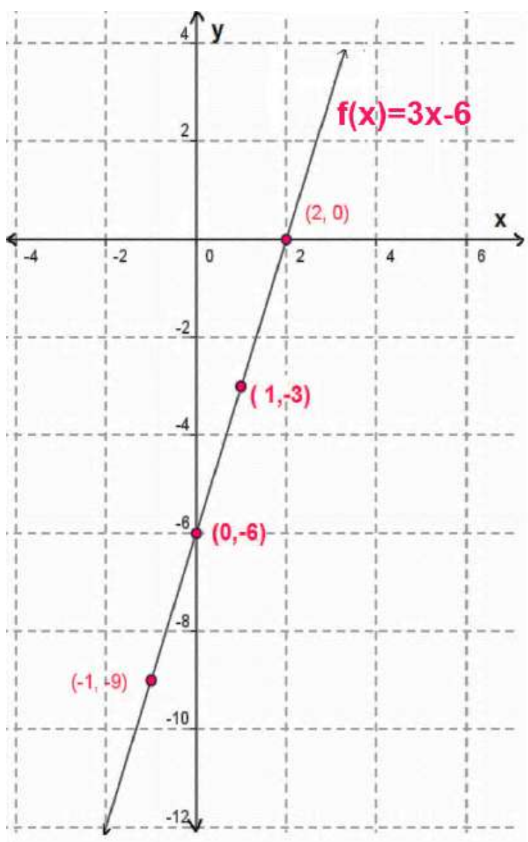
سبق وذكرنا ان كل معادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين$(ax + by + c = 0)$ تتحقق بعدد لا نهائي من الأزواج المرتبة (x, y). ويمكن تمثيل المعادلة هذه بالصيغة $y = f(x) = ax + c$ حيث ان الثوابت $a, c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq o$ وان $f(x)$ هي قاعدة الاقتران بين x و y وسوف نطلق عليها فيما بعد مصطلح (الدالة) ويمكن تمثيل منحنى تلك الدالة بيانياً عن طريق تحديد موقعي زوجين من الأزواج المرتبة آنفة الذكر على الاقل في المستوى الاحداثي والتوصيل بينها فنحصل على خط مستقيم ولهذا السبب تسمى هذه المعادلات بالمعادلات الخطية ويكفي لتمثيلها بيانياً ان نحدد موقع زوجين فقط من الأزواج المرتبة.

مثال 17:- مثّل على المستوي الأحداثي المخطط البياني للدالة

$$y = f(x) = 3x - 6$$

الحل:- نكوّن جدول لبعض قيم كل من x, y بهدف الحصول على الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلة

x	-1	0	1	2	……
$y = f(x)$	-9	-6	-3	0	……



ملاحظة:- يفضل في أغلب الاحيان تعيين نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الاحداثيين.

1) مع المحور x بتعويض $y = 0$

2) مع المحور y بتعويض $x = 0$

مثال 18:- مثّل على المستوي الاحداثي المخطط البياني للدالة $y = f(x) = 2x + 1$

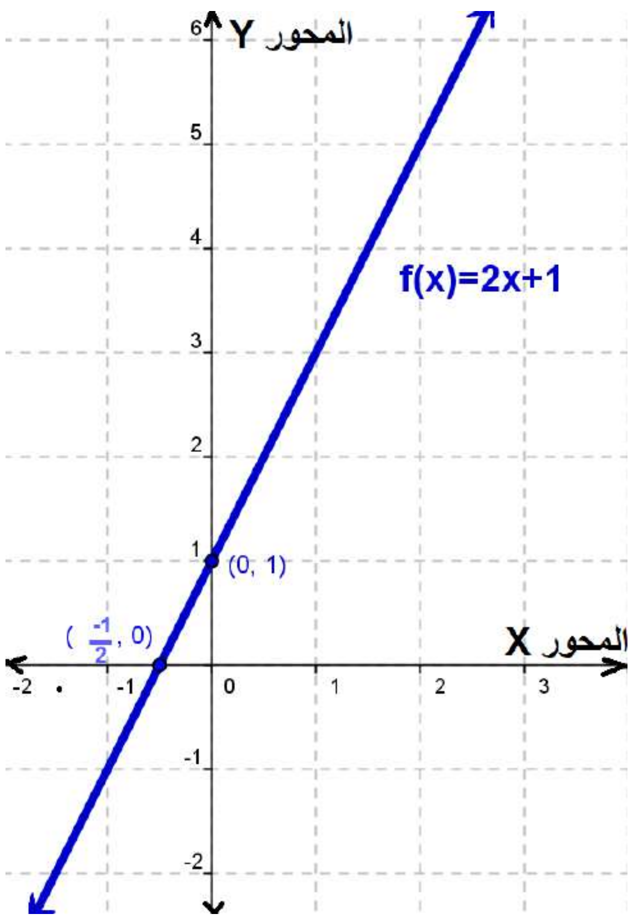
الحل : أن التمثيل البياني لهذه الدالة الخطية (كونها من الدرجة الأولى بمتغيرين)هو خط مستقيم ولذلك سنكتفي باستخراج نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين وكما يلي :

1) مع المحور x بتعويض $y = 0$ ، أي ان

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow \ x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}, 0\right) = (-0.5\,, 0)$$

2)) مع المحور y بتعويض $x = 0$ ، أي ان

$$y = 2 \times 0 + 1 \ \Rightarrow \ y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$



ولأجل إيجاد مجموعة الحل لزوج من المعادلات من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانياً نتبع الخطوات الآتية :-

1. نرسم على المستوي الأحداثي المستقيم الذي يمثل المعادلة الأولى بالطريقة التي استخدمناها في المثال (18) أعلاه. (أي بتعيين نقطتي تقاطعه مع المحورين).
2. نرسم على المستوي الأحداثي المستقيم الذي يمثل المعادلة الثانية بالطريقة ذاتها.
3. يكون الزوج المرتب الذي يمثل نقطة تقاطع المستقيمين هو مجموعة الحل وفي حالة ظهور مستقيمين متوازيين فإن مجموعة الحل هي مجموعه خالية أي ϕ .

مثال19:- جد مجموعة حل المعادلتين $5x + y = 5$, $2x - y = 2$ باستخدام الطريقتين الجبرية والبيانية .

الحل :- **اولاً. الطريقة الجبرية**

$$2x - y = 2 \quad ...... (1)$$
$$5x + y = 5 \quad ..... (2)$$

بجمع المعادلتين

$$7x = 7$$
$$x = \frac{7}{7} = 1$$

وبتعويض قيمة x في المعادله(2) نحصل على قيمة y وكما يلي :

$$5 \times 1 + y = 5$$
$$y = 5 - 5 = 0$$
$$S.s = \{(1,0)\}$$

ثانيا. الطريقة البيانية

1. نرسم المستقيم l_1 الذي يمثل المعادلة (1) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين .

- مع المحور x نعوض $y = 0$ أي أ ن

$$2x - 0 = 2$$
$$x = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \quad (1,0)$$

- مع المحور y نعوض $x = 0$ أي أن

$$2 \times 0 - y = 2$$
$$y = -2 \Rightarrow \quad (0,-2).$$

2. نرسم المستقيم l_2 الذي يمثل المعادله (2) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين.

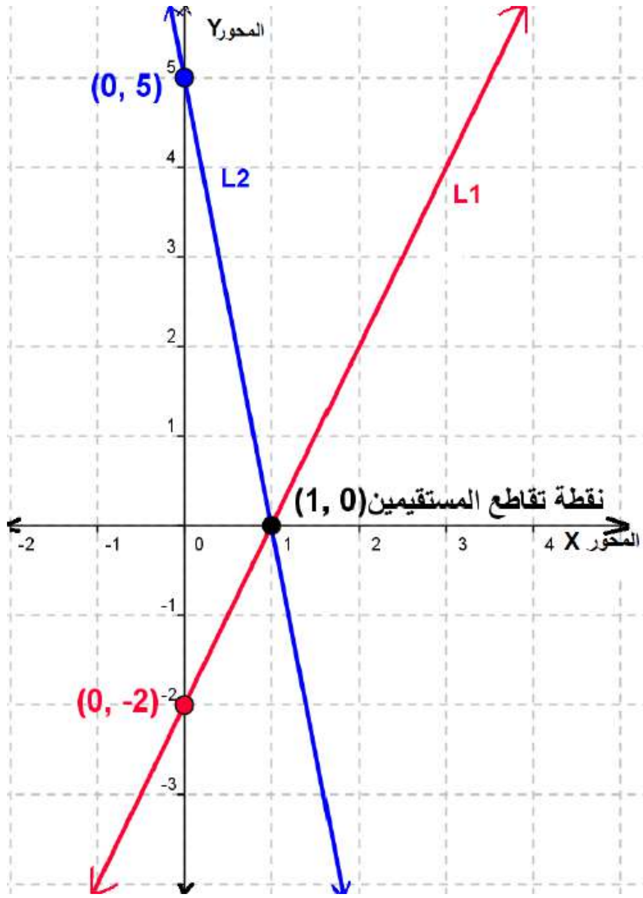
- مع المحور x نعوض $y = 0$ أي أن

$$5x + 0 = 5$$
$$x = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow (1,0)$$

- مع المحور y نعوض $x = 0$ أي أ ن

$$5 \times 0 + y = 5$$
$$y = 5 \Rightarrow \quad (0,5)$$

نلاحظ ان نقطة تقاطع المستقيمين هي $(1,0)$ والتي تمثل مجموعة الحل .



مثال20:- جد مجموعة حل المعادلتين

$$3y = 2x + 20$$

$$\frac{2x}{5} - \frac{y}{10} + 1 = 0$$

باستخدام الطريقتين الجبرية والبيانية .

الحل :- **اولاً. الطريقة الجبرية**

بترتيب المعادلة (1) وضرب المعادلة الثانية بالعدد (10) نحصل على

$$-2x + 3y = 20 \quad \dots (1)$$

$$4x \;-\; y = -10 \dots (2)$$

بضرب المعادلة الثانية بالعدد 3 نحصل على

$$-2x + 3y = 20 \qquad \dots (1)$$

$$12x - 3\,y = -30 \quad \dots (2)$$

وبجمع المعادلتين نحصل على:

$$10x = -10$$

$$x = \frac{-10}{10} = -1$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على

$$-2 \times (-1) + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 2 = 18$$

$$y = \frac{18}{3} = 6$$

$$\therefore \quad S.s = \{(-1, 6)\}$$

ثانيا. الطريقة البيانية

1 . نرسم المستقيم l_1 الذي يمثل المعادلة (1) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين .

- مع المحور x نعوض $y = 0$ ، أي ان

$$0 = 2x + 20$$

$$2x = -20$$

$$x = -10 \Rightarrow (-10, 0)$$

- مع المحور y نعوض $x = 0$ ، أي ان

$$3y = 0 + 20$$

$$y = \frac{20}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{20}{3}\right) = (0, 6.6)$$

2. نرسم المستقيم l_2 الذي يمثل المعادله (2) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين .

- مع المحور x نعوض $y = 0$ ، أي ان

$$\frac{2x}{5} - 0 + 1 = 0$$

$$\frac{2x}{5} = -1$$

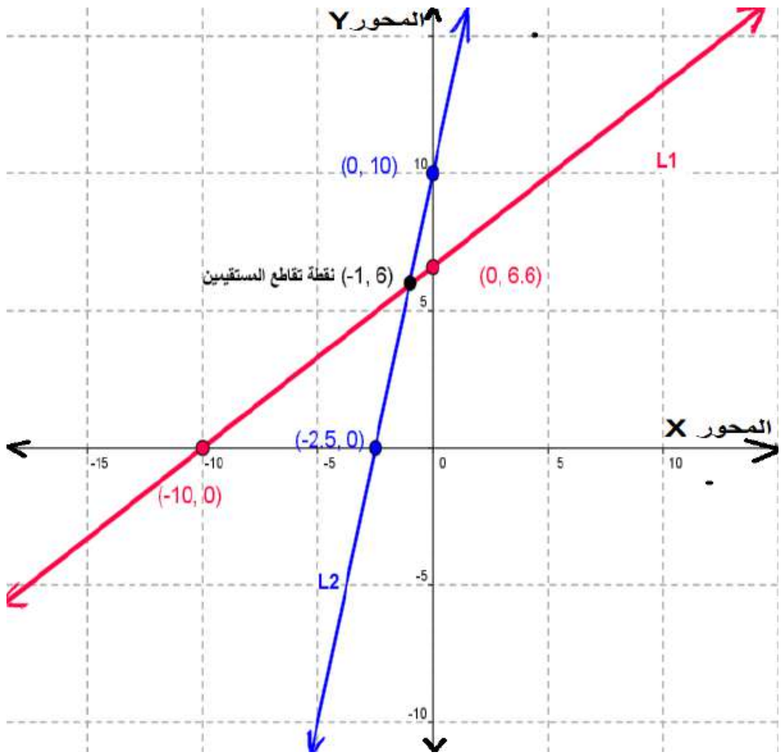
$$x = \frac{-5}{2} \Rightarrow \left(\frac{-5}{2}, 0\right) = (-2.5, 0)$$

- مع المحور y نعوض $x = 0$ ، أي ان

$$0 - \frac{y}{10} + 1 = 0$$

$$\frac{-y}{10} = -1 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (0, 10)$$

نلاحظ ان نقطة تقاطع المستقيمين هي $(-1, 6)$ هي التي تمثل مجموعة الحل .



مثال 21:- زاويتان متتامتان قياس أحداهما يزيد بمقدار $30°$ عن أربعة أمثال قياس الزاوية الاخرى . جد قياس كلاً من الزاويتين .

الحل :- نفرض إن قياس الزاوية الأولى بالدرجات = x

وإن قياس الزاوية الثانية بالدرجات = y

وبما إن الزاويتين متتامتان فإن

$$x + y = 90 \ldots (1)$$
$$x - 4y = 30 \ldots (2)$$

بالطرح

$$5y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{5} = 12°$$ (قياس الزاوية الثانية)

وبالتعويض بالمعادلة الأولى نحصل على قياس الزاوية الاولى وكما يأتي:

$$x + 12 = 90 \Rightarrow x = 90 - 12 = 78°$$ (قياس الزاوية الاولى)

تمارين(1-2)

1. جد مجموعة الحل لأزواج المعادلات الآتية بالطريقة الجبرية: -

1) $2x + 3y = 2$
$2x - 3y = 0$

2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 4$
$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$

3) $2x - 3y = -44$
$-(x - 8) - 64 = -5y$

4) $\frac{2x - 5y}{3} - \frac{3x + 8y}{11} = -56$
$y = x$

5) $\frac{2x - y}{x - y} = \frac{8}{5}$
$\frac{2x + 4}{x + 1} = 4$

2. جد مجموعة الحل لأزواج المعادلات الآتية بالطريقتين الجبرية والبيانية

1) $2x + y = 4 \quad , \quad x - y = -1$
2) $4x + 3y = 17 \quad , \quad 2x + 3y = 13$
3) $3x + y = 15 \quad , \quad 3x + 7y = 15$
4) $2x + 3y = -1 \quad , \quad 5x + 6y = -3$
5) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \quad , \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$

3. عدد مؤلف من رقمين ، مجموع رقمي مرتبتيه يساوي 9 ، فإذا أستبدلنا آحاده بعشراته حصلنا على عدد يقل عن العدد الأصلي بمقدار 45 فما هو العدد؟

(5-1) المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد

المعادلة التي صيغتها العامة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}, \mathrm{a} \neq 0$ (أي ثوابت حقيقية) تسمى ((معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هو المتغير x)) كما

- ❖ يسمى الثابت a معامل x^2
- ❖ يسمى الثابت b معامل x
- ❖ يسمى الثابت c الحد المطلق

وهناك ثلاث طرائق لحل هذا النوع من المعادلات هي :-

- ➢ طريقة التحليل إلى العوامل
- ➢ طريقة إكمال المربع
- ➢ طريقة القانون (الدستور)

وسنتناول في هذا البند هذه الطرائق بالتفصيل :-

(1-5-1) طريقة التحليل إلى العوامل:-

تعتمد الطريقة هذه على أساليب تحليل المقادير الجبرية إلى العوامل والتي درستها بالتفصيل في المرحلة المتوسطة وهي (استخراج العامل المشترك - الفرق بين مربعين – فرق ومجموع مكعبين – التحليل بالتجربة) فضلاً على استخدام البديهية التي تنص على ((إذا كان حاصل ضرب كميتين يساوي صفراً فإن احدهما على الاقل يساوي صفراً)).

ونعبر عن ذلك رمزياً كالآتي

إذا كان $a \,.\, b = 0$ فأما $a = 0$ أو $b = 0$

والامثلة الآتية توضح تفصيلاً اكثر عن الطريقة هذه:-

مثال 22 :- مستخدماً طريقة التحليل إلى العوامل ، جد مجموعة حل المعادلات الآتية :-

a) $x^2 + 5x = -6$

b) $3x^2 - 5x = 0$

c) $9x^2 = 16$

الحل :

a) $x^2 + 5x = -6$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x+3)(x+2) = 0 \text{ (التحليل بالتجربة)}$$

أما:-

$$x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3$$

أو:-

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore \quad S.s = \{-3\,, -2\,\}$$

b) $3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$ (التحليل باستخراج العامل المشترك)

أما:-

$$x = 0$$

أو:-

$$3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad S.s = \{0, \tfrac{5}{3}\}$$

C) $9x^2 = 16$

$$9x^2 - 16 = 0$$

$(3x - 4)(3x + 4) = 0$ (التحليل بطريقة الفرق بين مربعين)

أما:-

$$3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

أو:-

$$3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$$\therefore \quad S.s = \{ \frac{4}{3}, \frac{-4}{3} \}$$

مثال 23:- جد مجموعة حل المعادلة $(x - 5)^2 + x(x + 1) = 15$

الحل :-

$$x^2 - 10x + 25 + x^2 + x - 15 = 0$$
$$2\,x^2 - 9x + 10 = 0$$
$$(2x - 5)(x - 2) = 0$$

أما:-

$$2x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

أو:-

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$S.s = \{ \frac{5}{2}, 2 \}$$

(2-5-1) طريقة إكمال المربع:-

قد يصعب أحياناً أو يستحيل تحليل الطرف الأيسر للمعادلة لذلك نلجأ إلى طرق أخرى منها طريقة ((إكمال المربع)) والتي يقتضي استخدامها للحل إتباع عدد من الخطوات وهي: -

1. نقل الحد المطلق إلى الطرف الايمن وترتيب المعادلة ترتيباً تنازلياً .
2. تقسيم المعادلة على معامل الحد الذي يحتوي x^2 .
3. إضافة المقدار $\left(\frac{\text{معامل}\, x}{2}\right)^2$ لطرفي المعادلة.
4. كتابة الحد الأيسر للمعادلة بصورة المربع الكامل أي بالصورة $(x-a)^2$ وتبسيط الطرف الايمن.
5. إكمال الحل بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة .

والمثال الآتي يوضح الخطوات هذه :-

مثال 24:- جد مجموعة حل المعادلة $x^2+4x-5=0$ بطريقة إكمال المربع

الحل :

$$x^2+4x=5$$

نضيف $\left(\left(\frac{4}{2}\right)^2=4\right)$ لطرفي المعادلة فتصبح

$$x^2+4x+4=5+4$$
$$(x+2)^2=9$$

وبجذر الطرفين نحصل على :-

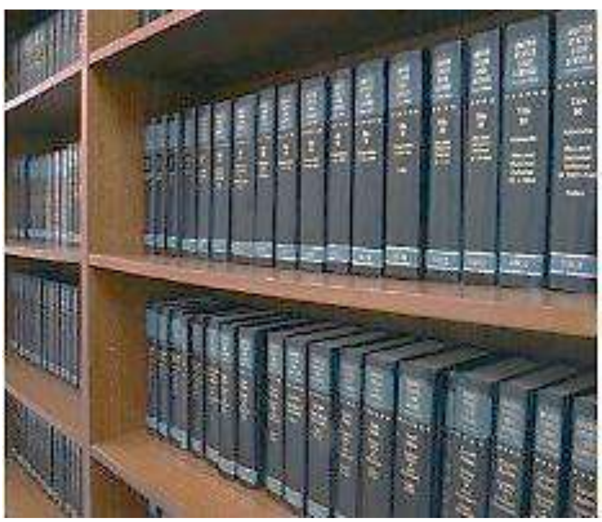
$$x+2=\pm 3$$

أما:-

$$x=3-2=1$$

أو:-

$$x=-3-2=-5$$
$$S.s=\{-5,1\}$$



(3-5-1) طريقة القانون (الدستور):-

كما تعلمنا ،إن الصيغة العامة لمعادلة الدرجة الثانية بمتغير واحد (او مجهول واحد) x هي

$$ax^2 + bx + c = 0$$

سوف نستخدم طريقة إكمال المربع لإيجاد مجموعة الحلول للمعادلة (وسوف نطلق عليها أيضاً جذور المعادلة) وكالاتي: -

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهكذا نحصل على الحلين (أو الجذرين)

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويطلق على العلاقة $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ بالقانون ((أو الدستور)) ويستخدم لإيجاد جذري معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد حيث :

الحد المطلق : c ، معامل الحد $b: x$ معامل الحد $a: x^2$

كما يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ بالعامل المميز حيث نتمكن باستخدامه من تمييز جذري المعادلة قبل المباشرة بحلها باستخدام الدستور وكما يأتي:-

1. **إذا كان المميز عدداً موجباً (أي $b^2 - 4ac > 0$) فأن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين (غير متساويين)**
2. **إذا كان المميز يساوي صفراً (أي $b^2 - 4ac = 0$) فأن للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين يساوي كل منهما $\frac{-b}{2a}$**
3. **إذا كان المميز عدداً سالباً(أي $b^2 - 4ac < 0$) فأنه ليس للمعادلة جذور في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ونعبر عن ذلك بالقول ان مجموعة الحل مجموعة خالية ϕ**

مثال 25:- جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 + 2x = 4$ بطريقة الدستور

الحل :- نعيد ترتيب حدود المعادلة لنجعلها مطابقة للصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

وتصبح بالشكل $x^2 + 2x - 4 = 0$

وبالمقارنة نجد إن $a = 1 \,, \quad b = 2 \quad , \quad c = -4$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-2}{2} \pm \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore S.s = \{-1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}\}$$

مثال 26:- جد مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 3x - 1 = 0$ بطريقة الدستور

الحل :- $a = 2 \,, \quad b = -3 \quad , \quad c = -1$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\therefore \quad S.s = \left\{\frac{3 + \sqrt{17}}{4}, \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right\}$$

مثال 27:- جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ بطريقة الدستور

الحل :- $a = 1\,, \quad b = -10 \quad , \quad c = 25$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times (25)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2}$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

ونلاحظ هنا اننا نكتب مجموعة الحل كما يلي $S.s = \{5, 5\}$ نظراً لكون العامل المميز $b^2 - 4ac$ يساوي صفراً مما يعني ان للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين.

وبالإمكان حل المثال بطريقة أخرى هي :-

$$b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 100 - 100 = 0$$

وحيث إن العامل المميز قيمته صفر فإن للمعادلة جذرين متساويين يساوي كل منهما $\frac{-b}{2a}$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$S.s = \{5, 5\}$$

مثال 28:- بيّن إن المعادلة $x^2 - 2x + 5 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل :-

$$a = 1\,, \quad b = -2 \quad , \quad c = 5$$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

وبما ان المميز عدد سالب لذلك فانه ليس للمعادلة حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

(4-5-1) إيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها:-

لإيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها نستخدم القانون الآتي

$$\boxed{x^2 - (\text{مجموع الجذرين}) \times x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0}$$

مثال29:- كون معادلة تربيعية جذريها العددين -3 ، 2

الحل :- $x^2-(\text{مجموع الجذرين})\times x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$$x^2-(-3+2)\times x+(-3\times 2)=0$$

$$x^2+x-6=0$$

ملاحظة:-

حاصل ضرب الجذرين $=\frac{c}{a}$ ، مجموع الجذرين $=\frac{-b}{a}$

مثال 30:- جد مجموعة حل المعادلة $x^2-4x+3=0$ وتحقق من صحة الحل مستخدماً المعلومات الواردة في الملاحظة أعلاه .

الحل :-

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

أما

$$(x-1)=0 \Rightarrow x=1$$

أو

$$(x-3)=0 \Rightarrow x=3$$

$$\therefore S.s=\{1,3\}$$

(مجموع الجذرين) $\frac{-b}{a}=\frac{-(-4)}{1}=4$ **مجموع الجذرين** $(3+1=4)$

(حاصل ضرب الجذرين) $\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3$ **حاصل ضرب الجذرين** $(3 . 1=3)$

مثال 31:- إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2+kx-15=0$ يساوي 3 فما هو الجذر الاخر وما قيمة k ؟

الحل :- نفرض ان الجذر المجهول هو h ، فيكون حاصل ضرب الجذرين هو $3\times h$

بالمقارنة مع الصيغة $x^2-(\text{مجموع الجذرين})\times x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$3\times h=-15 \Rightarrow h=\frac{-15}{3}=-5$ **(وهي قيمة الجذر الثاني)**

$3+(-5)=-2$ (مجموع الجذرين)

بالمقارنة مع الصيغة أعلاه نتوصل إلى أن :-

$$-k=-2 \Rightarrow k=2$$

تمارين(1-3)

1. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة التحليل :-

a) $6x^2 + 7x - 3 = 0$
b) $x^2 + 3x - 4 = 0$
c) $x^2 + 12 = 7x$
d) $16 = x^2 - 6x$
e) $3x^2 = 9x$
f) $(2x - 3)(x - 1) = 15$
g) $x - \sqrt{x} - 12 = 0 \quad , \sqrt{x} \geq 0 \, , x \geq 0$

2. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة اكمال المربع:-

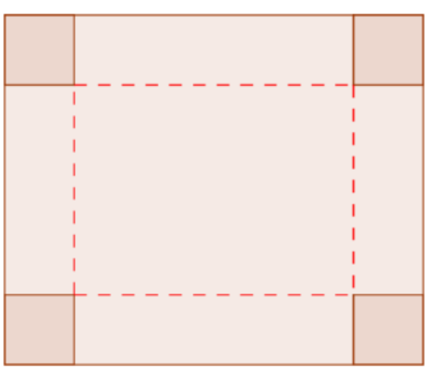
a) $x^2 - 7x - 8 = 0$
b) $42 + x^2 = 13x$
c) $6x^2 = 6 - 5x$
d) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

3. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة الدستور:-

a) $3x^2 - 6x = -2$
b) $x^2 - 4x + 3 = 0$
c) $4x^2 = 12x - 9$
d) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
e) $6x^2 + 7x - 3 = 0$
f) $(x + 5)^2 + 2 = 38$
g) $x^2 - 6x - 9 = 0$

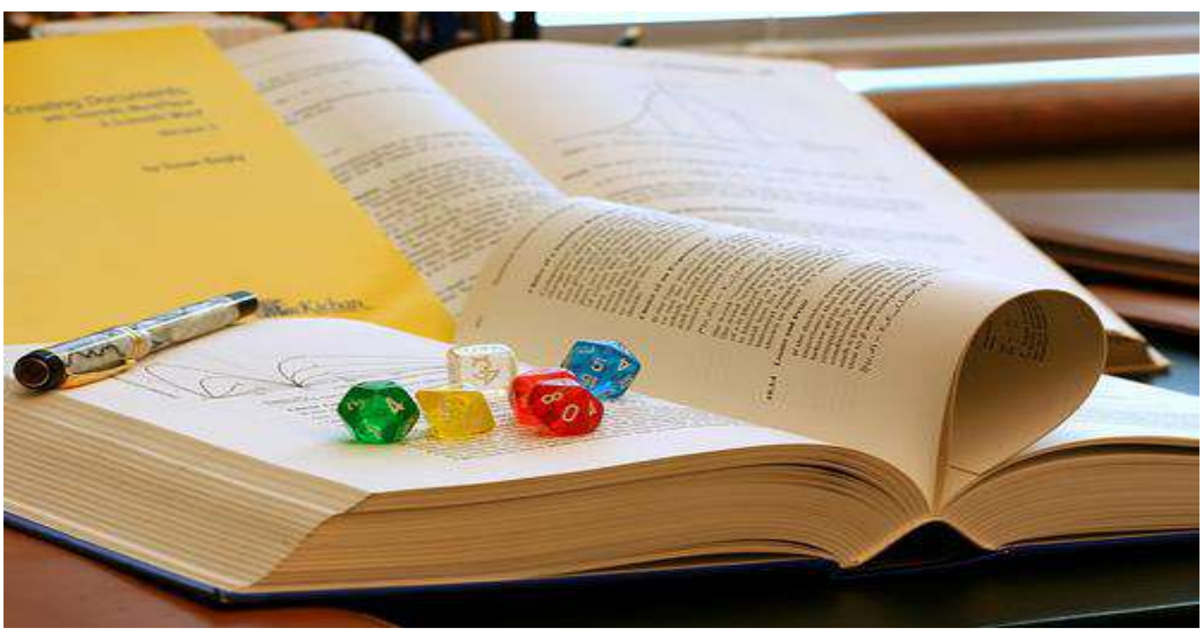
4. جد قيمة k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k - 5) \times x + 64 = 0$ متساويين .

5. حقل مربع الشكل يستخدم لتربية الدواجن . إذا زيد طول ضلعه بمقدار $(3m)$ تزداد مساحته بمقدار $(81m^2)$. جد طول ضلعه حديقة مربعة الشكل طول ضلعها $(20m)$ ، ما عرض الشريط اللازم زراعته في محيطها لتصبح نصف مساحتها مزروعة؟



6. في ورشة الصناعات الغذائية يراد صنع صندوق لعرض المنتوجات قاعدته مربعة ومفتوح من الأعلى باستخدام قطعة مــن الكرتون الملون مربعة الشكل وقطع مربعات متساوية المساحة من أركانهــا الأربعة طول ضلع كل منهــا $(4cm)$ وثنـي الأجزاء البارزة (كما في الشكل ألمجاور) فإذا كان حجم الصندوق المطلوب $(1024cm^3)$ فما طول ضلع قطعة الكرتون الملونة ؟


الفصل الثاني
الدوال الحقيقية



الأهداف السلوكية:

يجب على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يستطيع:-

1. **إدراك مفهوم الدالة (مجالها،مجالها المقابل، مداها، قاعدة الاقتران- بيان الدالة) .**
2. **تمثيل الدوال بيانياً (الدوال الثابتة،الدوال الخطية، الدوال من الدرجة الثانية والثالثة وفي حالات خاصة).**
3. **إدراك مفهوم التغير ويتمكن من تمييز نوعيه الطردي والعكسي .**
4. **حل مسائل تتضمن مفهوم التغير بنوعيه.**

الفصل الثاني

الدوال الحقيقية

(1-2) مفهوم الدالة (مجالها، مجالها المقابل، مداها، قاعدة الاقتران- بيان الدالة).

(1-1-2) بعض أنواع الدوال الجبرية .

(2-1-2) أوسع مجال للدالة.

(2-2) التمثيل البياني للدالة الجبرية.

(1-2-2) التمثيل البياني للدالة الثابتة.

(2-2-2) التمثيل البياني للدالة الخطية .

(3-2-2) التمثيل البياني للدالة من الدرجة الثانية بالصورة $f(x) = ax^2 + b$.

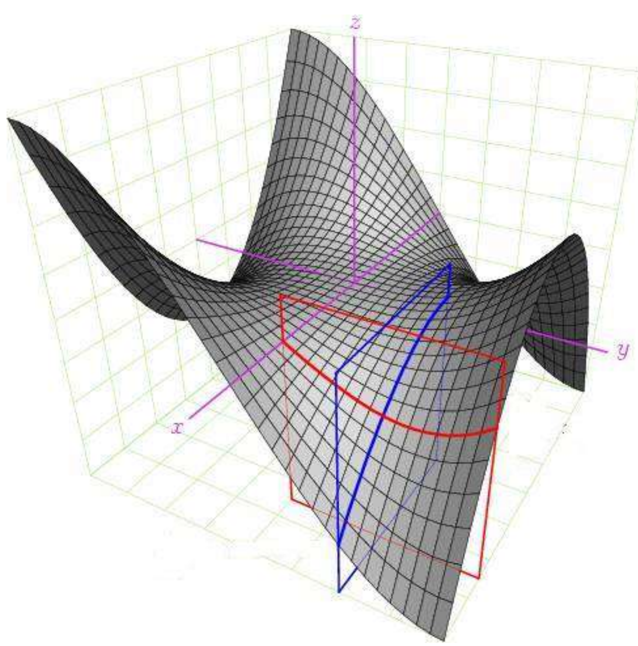
(4-2-2) التمثيل البياني للدالة من الدرجة الثالثة بالصورتين :-

$$f(x) = ax^3 + b \,, f(x) = (x+a)^3$$

(3-2) التغير

(1-3-2) التغير الطردي

(2-3-2) التغير العكسي



الفصل الثاني

الدوال الحقيقية(*The Real Functions*)

(1-2) مفهوم الدالة (مجالها، مجالها المقابل، مداها، قاعدة الإقتران- بيان الدالة)

مفهوم الدالة هو أحد الاسس المهمة في الرياضيات وفي تطبيقات الرياضيات في العلوم الفيزيائية والعلوم الاجتماعية .

يقال للعلاقة f بأنها دالة (($function$)) إذا كانت تقوم بأقران كل عنصر من مجموعة أولى غير خالية تسمى مجموعة المجال (($Domain$)) بعنصر وحيد من مجموعة أخرى غير خالية تسمى مجموعة المجال المقابل (($Codomain$)) ، ويعبر عن الدالة بالشكل الرياضي الآتي :-

$$f: A \to B: \forall x \in A \ \exists \ y \in B \ni y = f(x)$$

ونستنتج من ذلك أن للدالة ثلاثة عناصر رئيسة هي :-

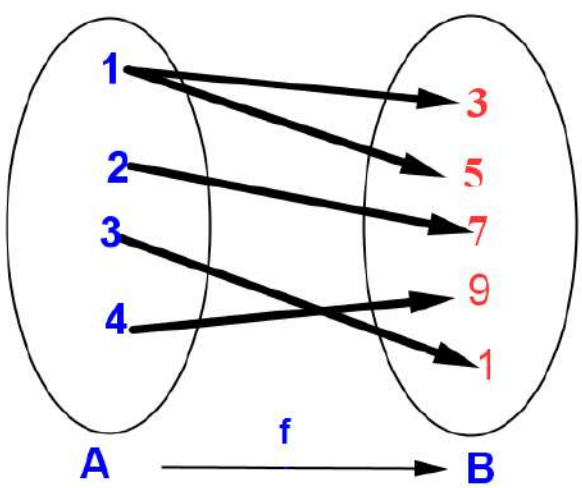
1. **مجال الدالة ($Domain$) وتمثله المجموعة A حيث $x \in A$**
2. **المجال المقابل للدالة ($Codomain$) وتمثله المجموعة B حيث $y \in B$**
3. **قاعدة إقتران الدالة وهي العلاقة التي تربط كل عنصر من عناصر مجموعة المجال A بعنصر واحد فقط من مجموعة عناصر المجال المقابل B .**

أما بيان الدالة فهو مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تنتج تحت تأثير الدالة f ويعبر عنه بالشكل الرياضي الآتي :-

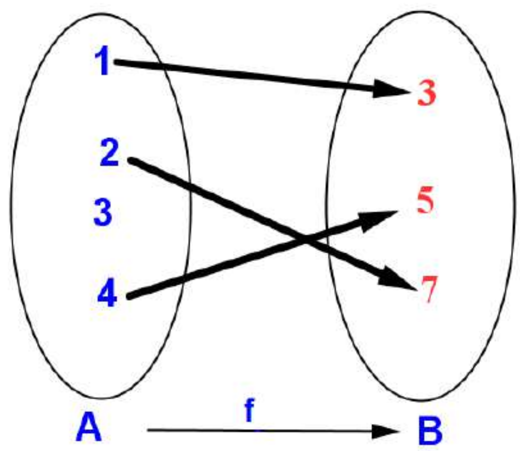
$$f: \{(x, y): y = f(x); \ \forall x \in A, y \in B\}$$

فضلاً عن أن مدى الدالة ($Range$) هو مجموعة قيم تلك الدالة أي مجموعة صور عناصر مجالها وفقاً لقاعدة الإقتران لهذه الدالة. بقي أن نذكر إن المتغير x يسمى بالمتغير المستقل للدالة $y = f(x)$ أما المتغير y الذي تعتمد قيمته على قيمة x فإنه يسمى بالمتغير التابع للدالة .

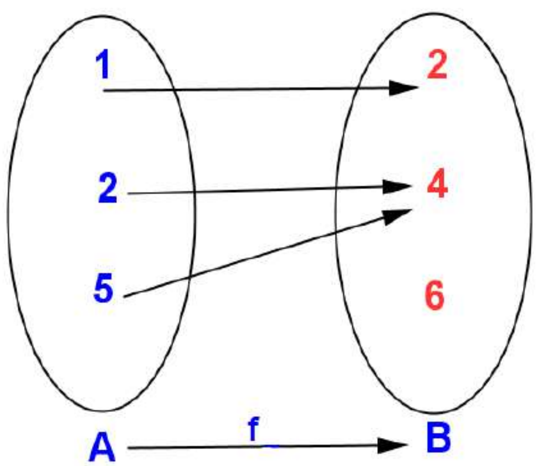
مثال 1:- المخطط السهمي المجاور لا يمثل دالة لأن العنصر (1) في مجموعة مجالها له صورتان هما 3 , 5 أي إنه مقترن بأكثر من عنصر من عناصر مجموعة المجال المقابل .



مثال2:- المخطط السهمي المجاور لا يمثل دالة لأن هنالك عنصراً في مجموعة المجال هو العدد 3 ليس له صورة في مجموعة المجال المقابل في حين أن تعريف الدالة أشترط إقران جميع عناصر المجال بصور من عناصر المجال المقابل وعدم ترك أي منها بدون اقتران.



مثال3:- المخطط السهمي المجاور يمثل دالة للأسباب الآتية :-



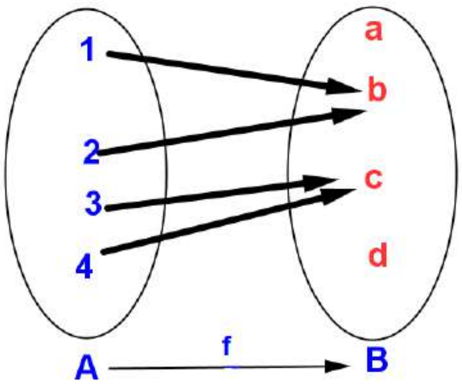
- جميع عناصر المجال لها صور في مجموعة المجال المقابل (أي لا يوجد عنصر من مجموعة المجال لم يتم أقرانه بعنصر من مجموعة المجال المقابل)
- لا يوجد عنصر في مجموعة المجال له أكثر من صورة واحدة في مجموعة المجال المقابل .

ملاحظة :- لو راجعنا المثال 3 أعلاه لوجدنا أن العنصرين 5 و 2 من عناصرمجموعة المجال يشتركان بالصورة نفسها في مجموعة المجال المقابل وهي العدد 4 وهذا يقودنا الى الاستنتاج الآتي :-

استنتاج :- يمكن أن تشترك بعض أو كل عناصر مجموعة المجال بنفس الصورة في مجموعة المجال المقابل، لكن لا يمكن أن يكون للعنصر الواحد في مجموعة المجال أكثر من صورة في مجموعة المجال المقابل .

مثال 4:- في المخطط السهمي المجاور تسمى A مجموعة المجال ($Domain$) كما تسمى B مجموعة المجال المقابل ($Codomain$) أما مدى الدالة فهو المجموعة $\{b, c\}$ أي مجموعة الصور وهي مجموعة جزئية من مجموعة المجال المقابل B كما أن بيان الدالة يعبر عنه بالاتي:-

$$f: \{(1, b), (2, b), (3, c), (4, c)\}$$



مثال 5 :- إذا كانت $Y = (0, 2, 3, 8\}$, $X = \{1, 2, 3\}$ وكانت

$$f: X \to Y: y = f(x) = x^2 - 1$$

(1) اكتب f بذكر عناصرها كأزواج مرتبة ((أي جد بيان الدالة)) .

(2) أكتب مدى الدالة ($Range$) .

(3) مثلها بمخطط سهمي .

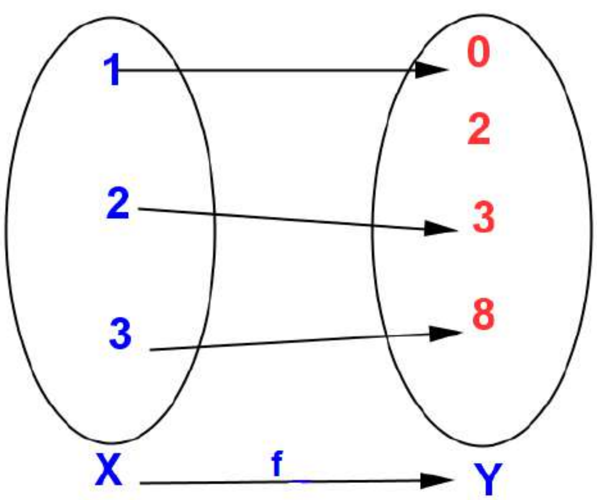
الحل :- بما أن $y = f(x) = x^2 - 1$ لذلك فان

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0 \to (1, 0)$$
$$f(2) = 2^2 - 1 = 3 \to (2, 3)$$
$$f(3) = 3^2 - 1 = 8 \to (3, 8)$$

ويكون بيان الدالة هو

$$\{(1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$$

أما المدى فهو $\{0 , 3 , 8 \}$



مثال 6:- إذا كانت $K = \{-3 , -2 , -1 , 0 , 1, 2\}$ ، $L = \{y: y \in N, y \leq 10\}$

وكان $f: K \to L: f(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in K$

1) جد بيان ومدى الدالة f 2) ارسم المخطط السهمي للدالة

الحل :-أولاً:- لإيجاد مدى الدالة ينبغي إيجاد صور عناصر مجموعة المجال (K) بواسطة الدالة (f) بعد التعويض بقاعدة الإقتران وكما يلي :-

$f(x) = x^2 + 1$

$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10 \to (-3 \ , 10)$

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5 \to (-2 \ , 5)$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \to (-1 \ , 2)$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1 \to (0 \ , 1)$

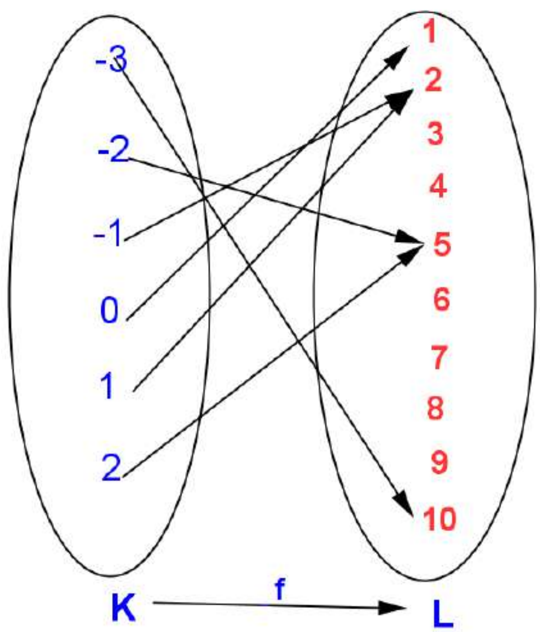
$f(1) = 1^2 + 1 = 2 \to (1 , \ 2)$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \to (2 , \ 5)$

ولذلك فإن بيان الدالة هو $f = \{(-3, 10), (-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$

أما المدى فهو $\{1 , 2 , 5 , 10\}$

ثانياً:- لرسم المخطط السهمي للدالة لابد من ذكر جميع عناصر مجموعة المجال المقابل (L) بشكل صريح .



(1-1-2) بعض أنواع الدوال الجبرية

سنهتم في هذا البند بالدالة التي تكوّن كلّ من مجموعة مجالها ومجموعة مجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$) ومثل هذا النوع من الدوال يسمى بالدوال الحقيقية.

لاحظ الدوال الآتية :-

1. $f(x) = 6$ تسمى دالة ثابتة .
2. $f(x) = 3x - 2$ تسمى دالة خطية
3. $f(x) = x^2 + x + 2$ تسمى دالة من الدرجة الثانية
4. $f(x) = x^3 - 8$ تسمى دالة من الدرجة الثالثة
5. $f(x) = \frac{x+2}{x-1} \ , \ x \neq 1$ تسمى دالة كسرية
6. $f(x) = \sqrt{2x-4} \ , x \geq 2$ تسمى دالة جذرية

وهنا لا بد من الاشارة الى أن قاعدة إقتران الدالة هي التي تحدد نوعها حيث أن الدالة الثابتة تكون بالصورة $f(x) = a \ , \ a \in \mathbb{R}$ والدالة الخطية تكون بالصورة $f(x) = ax + b$ حيث أن $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ فضلاً عن أن الدوال الكسرية يقصد بها الدوال التي تحتوي قاعدة اقترانها على المتغير x^n في مقام الكسر حيث $n = 1, 2, 3, \ldots ..$ فيما تسمى الدالة التي تحتوي على المتغير n داخل علامة الجذر (بغض النظر عن رتبة الجذر) بالدالة الجذرية .

متعددة الحدود (*Polynomial*)

متعددة الحدود من الدرجة (n)ويرمز لها بالرمز $f_{n(x)}$ أو إختصاراً $f(x)$ هي دالة معرفة كالآتي:-

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت (أعداد حقيقية) و $a_n \neq 0$ أما n فهو عدد صحيح موجب و x هو المتغير المستقل للدالة .

أمثلة :-

a) $f_{2(x)} = 3x^2 - 3x + 4$)(متعددة حدود من الدرجة الثانية $a_2 = 3 \neq 0$,

b) $f_{2(x)} = 5x^2$)(متعددة حدود من الدرجة الثانية $a_2 = 5 \neq 0$,

c) $f_{3(x)} = 3x^3 + 4x$) (متعددة حدود من الدرجة الثالثة $a_3 = 3 \neq 0$,

وهكذا . من هنا نستطيع أن نقول أن الدالة الثابتة في المثال (1) أعلاه هي متعددة حدود من الدرجة صفر والدالة الخطية في المثال (2) هي متعددة حدود من الدرجة الاولى والدالة في المثال (3) هي متعددة حدود من الدرجة الثانية والدالة في المثال (4) هي متعددة حدود من الدرجة الثالثة .

(2-1-2) أوسع مجال للدالة

أولاً :- الدوال الثابتة والخطية ومتعددة الحدود عموماً (أي الدوال غير الكسرية والدوال غير الجذرية) يكون أوسع مجال لها هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

ثانياً :- الدوال الكسرية يكون أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا قيم x التي تجعل مقام الدالة يساوي صفراً . (وفي حالة عدم وجود قيمة لـ x تجعل المقام يساوي صفراً يكون أوسع مجال هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية).

ثالثاً:- آ) الدوال الجذرية التي لها دليل زوجي أي $\sqrt[2]{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}, \ldots\ldots$ يكون اوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المقدار الجبري الموجود داخل الجذر غير سالب

ب) الدوال الجذرية التي لها دليل فردي أي $\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \ldots\ldots$ يكون اوسع مجال لها هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال7:- جد أوسع مجال للدوال الآتية :-

$a)\ f(x) = x^2 + 2x + 7$

نلاحظ هنا أن الدالة معرّفة دائماً في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أي إنه مهما كانت قيمة $x \in \mathbb{R}$ فإن الدالة تكون معرّفة وعليه فأن أوسع مجال لهذه الدالة هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. لاحظ ان الدالة متعددة حدود من الدرجة الثانية.

$b)\ f(x) = 7$

هذه الدالة ثابتة وأوسع مجال لها هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$c)\ f(x) = 5x + 4$

هذه الدالة خطية وأوسع مجال لها هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$d)\ f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

هذه الدالة معرّفة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ عدا قيمة $x = 1$ لأنها تجعل مقام الدالة يساوي صفراً لذلك فان اوسع مجال للدالة $\mathbb{R}/\{1\}$.

$e)\ f(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)}$

هذه الدالة معرّفة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ عدا قيمتي $x = -1,\ x = 3$ لأنها تجعل مقام الدالة يساوي صفراً لذلك فان أوسع مجال للدالة $\mathbb{R}/\{-1, 3\}$.

$f)\ f(x) = \sqrt{x}$

هذه الدالة معرفة لقيم محددة في $\mathbb{R}$ هي تلك القيم التي تكون فيها $x \geq 0$ (أي القيم غير السالبة فقط)
لذلك فان أوسع مجال للدالة هو $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

$g)\ \ f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

هذه الدالة معرفة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ لأن الجذر التكعيبي لأي عدد سالب ينتمي أيضاً الى $\mathbb{R}$.

ملاحظة:- ان العلاقة $y^2 = x$ لا تمثل دالة بالصورة $y = f(x)$ لأنه إذا كانت مثلاً $x = 4$ فان

$$y^2 = 4$$

أما:-

$$y = 2$$

او:-

$$y = -2$$

والذي يعني أن قيمة واحدة من مجموعة قيم المجال تقترن بأكثر من قيمة واحدة من مجموعة المجال المقابل. وكذلك الأمر بالنسبة للعلاقات $x^2 + 2y + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

(2-2) التمثيل البياني للدالة الجبرية

إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية فأن منحني الدالة $y = f(x)$ يعرف بأنه مجموعة الأزواج المرتبة $(x , f(x))$ على المستوى الإحداثي والتي تحقق قاعدة إقتران تلك الدالة. ولأجل تمثيل الدالة الجبرية بيانياً فأننا نختار بعض القيم لـ (x) من ضمن قيم مجال الدالة ونجد القيم المناظرة للمتغير (y) بأستخدام قاعدة الأقتران وينظم ذلك في جدول فيما يتم تمثيل الأزواج المرتبة الناتجة على المستوي الإحداثي ونوصل بينها لنحصل على منحني الدالة المطلوب .

(1-2-2) التمثيل البياني للدالة الثابتة

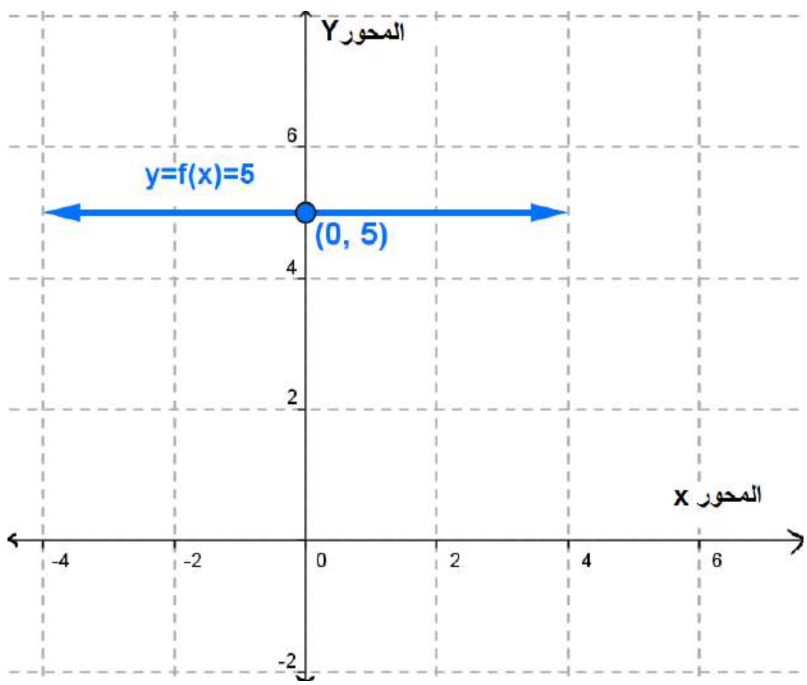
إن الشكل العام للدالة الثابتة هو $f(x) = a$ حيث a عدد ثابت ينتمي الى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وهذا يعني أن قيمة الدالة ستكون ثابته مهما تغيرت قيمة x وعليه فأن المخطط البياني للدالة الثابتة هو مستقيم موازي للمحور x $(x - axis)$ يمكن رسمه بتحديد نقطة تقاطعه مع المحور y $(y - axis)$ وهي $(0, a)$ ويتم رسم المستقيم الموازي للمحور x $(x - axis)$ المار بالنقطة $(0, a)$ ومن الضروري أظهار الأسهم في أطراف المستقيم للدلالة على امتداده الى ما لانهاية .

مثال 8:- ارسم المخطط البياني للدالة $f(x) = 5$

الحل :- (1) نرسم على ورق المربعات المحاور الإحداثية.

(2) نحدد موقع النقطة $(0, 5)$ على المحور y .

(3) نرسم المستقيم الموازي للمحور x المار بالنقطة $(0, 5)$ فيكون هو المخطط البياني المطلوب .



(2-2-2) التمثيل البياني للدالة الخطية

أن الشكل العام للدالة الخطية هو $f(x) = ax + b$ حيث أن كلاً من a , b أعداد ثابتة تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وإن $a \neq 0$. ومن المعلوم إن الصيغة $y = ax + b$ هي الصورة القياسية لمعادلة المستقيم وعليه فأنه يمكن رسم المنحني بسهولة عن طريق أختيار قيمتين للمتغير x والحصول على القيمتين المناظرتين للمتغير y. وبالتوصيل بين النقطتين على المستوي الأحداثي نحصل على المخطط البياني للدالة وهو خط مستقيم . ويفضل في معظم الاحيان تعيين نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين وكما يلي :-

1. **مع المحور الأفقي أي المحور (x) بتعويض $y = f(x) = 0$**
2. **مع المحور العمودي اي المحور (y) بتعويض $x = 0$**

مثال9 :- مثّل الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ بيانياً على ورق المربعات .

الحل :-

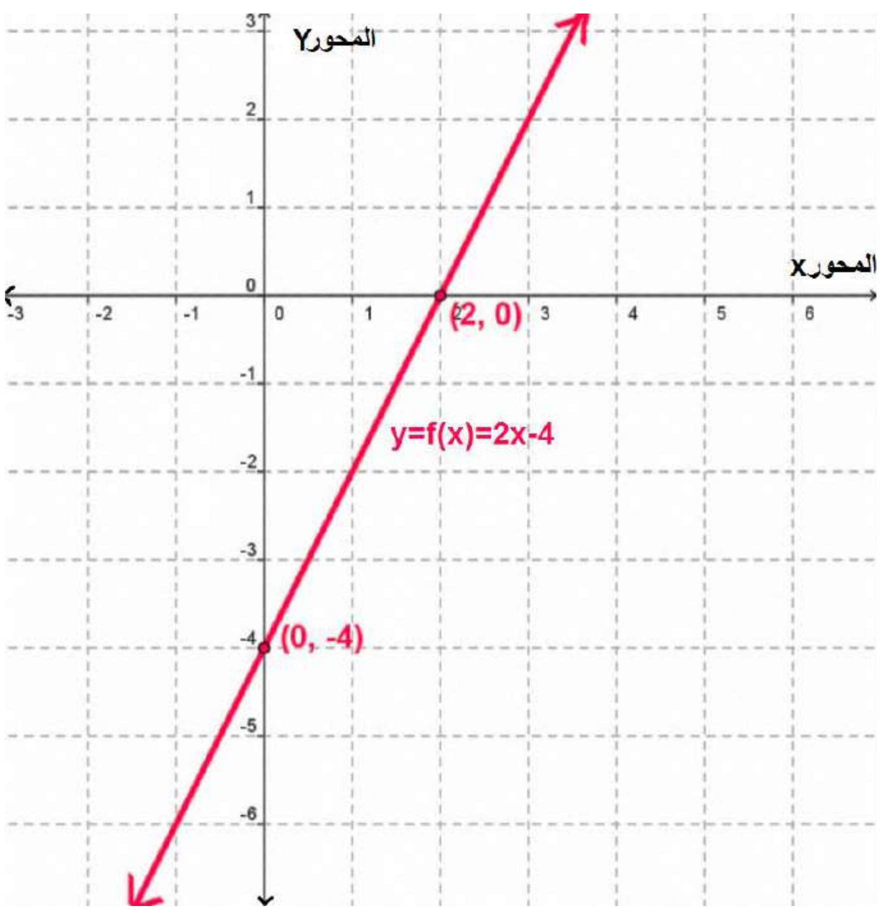
1. نستخرج نقطة التقاطع مع المحور x بتعويض $y = f(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2} \to x = 2 \to (2, 0)$$

2. نستخرج نقطة التقاطع مع المحور y بتعويض $x = 0$

$$y = 2.0 - 4 = 0 - 4 = -4 \to (0, -4)$$

3. نرسم على ورق المربعات المستوي الأحداثي ونسقط عليه النقطتين $(2, 0)$ ، $(0, -4)$ ونوصل بينهما بخط مستقيم فيكون هو المخطط البياني المطلوب .



مثال10:- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - 2x$

الحل :-

1. نستخرج نقطة التقاطع مع المحور x بتعويض $y = f(x) = 0$

$$4 - 2x = 0$$

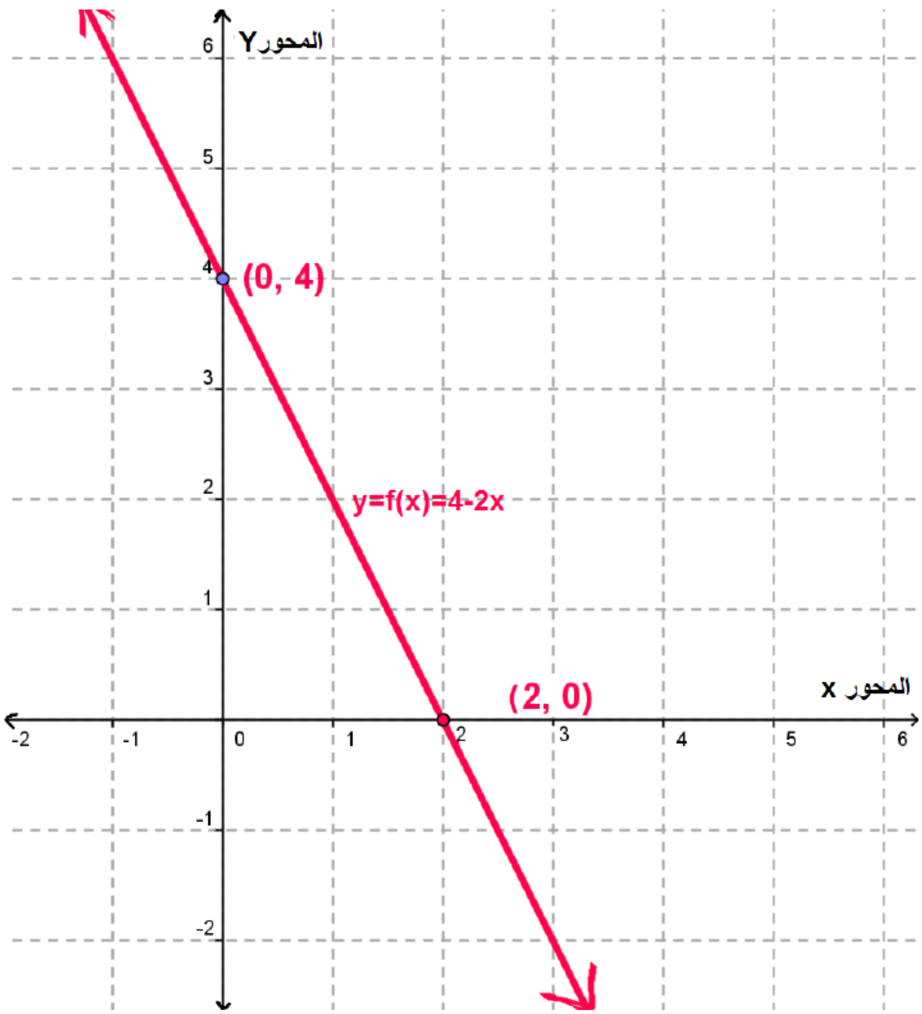
$$-2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2 \to (2, 0)$$

2. نستخرج نقطة التقاطع مع المحور y بتعويض $x = 0$

$$y = 4 - 2 \times 0 = 4 - 0 = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

3. نرسم على ورق المربعات المستوي الإحداثي ونسقط عليه النقطتين $(2, 0)$ ، $(0, 4)$ ونوصل بينهما بخط مستقيم فيكون هو المخطط البياني المطلوب .



(3-2-2) التمثيل البياني للدالة من الدرجة الثانية بالصورة $f(x) = ax^2 + b$

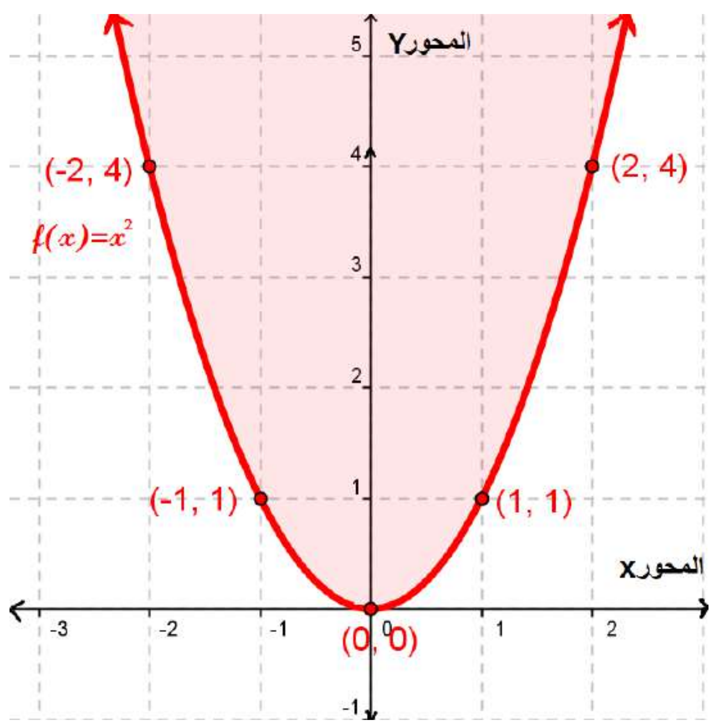
إن الدوال التي قاعدة إقترانها من الدرجة الثانية تمثل بيانياً بشكل خط منحني وليس مستقيم ويتم رسمها باستخدام أسلوب تعويض قيم للمتغير x من ضمن قيم مجال الدالة واستخراج القيم المناظرة للمتغير y ومن ثم يتم تمثيل الأزواج المرتبة الناتجة على المستوي الإحداثي . ويلاحظ أن المخطط البياني للدالة التي بالصورة $f(x) = ax^2 + b$ يكون متناظراً دائماً حول المحور y.

مثال11 :- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 \Rightarrow (-2, 4)$$
$$f(-1) = (-1)^2 = 1 \Rightarrow (-1, 1)$$
$$f(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$
$$f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow (1, 1)$$
$$f(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow (2, 4)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الأحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالازواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب والذي يسمى (القطع المكافئ)(*Parabola*) ومن الواضح ان المخطط البياني للدالة متناظر حول المحور y .

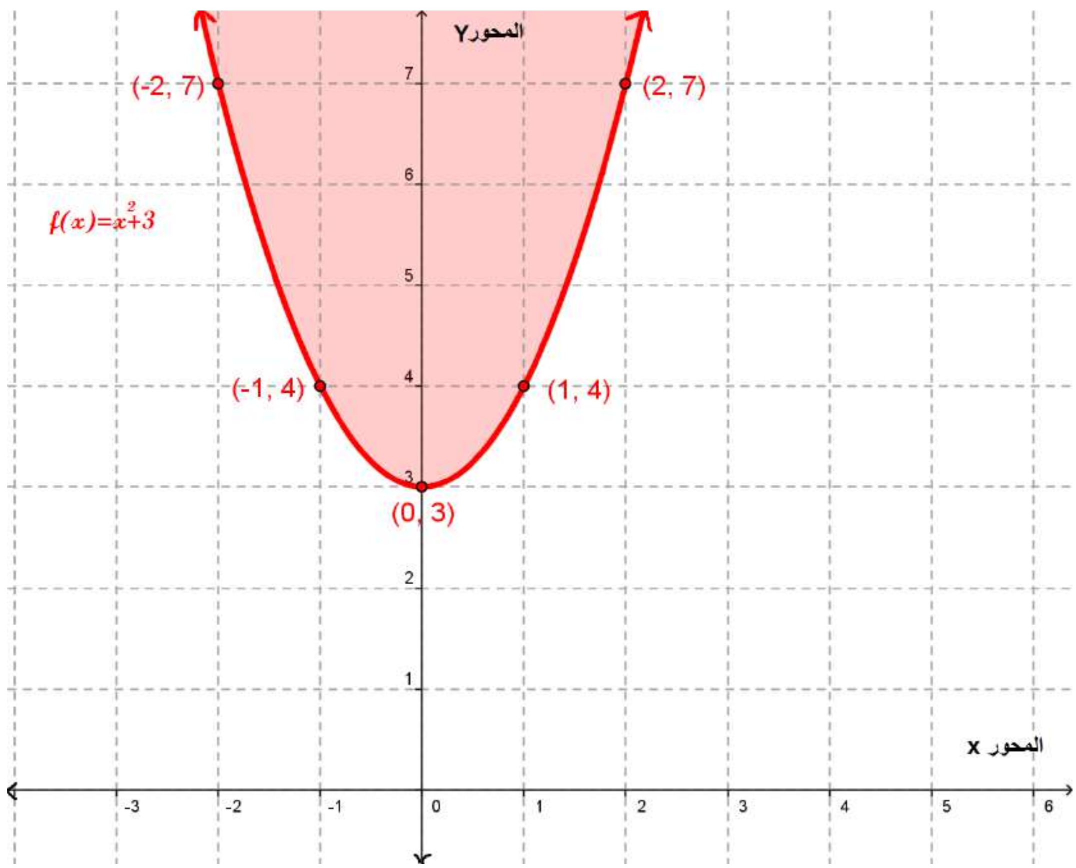


مثال 12:- ارسم المخطط البياني للدالة $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2+3$

الحل :- إن منحني الدالة هذه يمكن أن ينتج عن انسحاب للمنحني الذي يمثل الدالة $f(x)=x^2$ نحو الاتجاه الموجب للمحور y بمقدار 3 وحدات .

$$f(-2)=(-2)^2+3=7\Rightarrow(-2,7)$$
$$f(-1)=(-1)^2+3=4\Rightarrow(-1,4)$$
$$f(0)=0^2+3=3\Rightarrow(0,3)$$
$$f(1)=1^2+3=4\Rightarrow(1,4)$$
$$f(2)=2^2+3=7\Rightarrow(2,7)$$

وبتمثيل النقاط الخمس هذه على المحاور الإحداثية والتوصيل بينها بخط منحني يظهر الشكل المطلوب وهو قطع مكافئ أيضاً ونلاحظ بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال السابق (11) انسحاب جميع نقاط منحني القطع المكافئ بمقدار 3 وحدات بالاتجاه الموجب للمحور y (أي نحو الأعلى) .

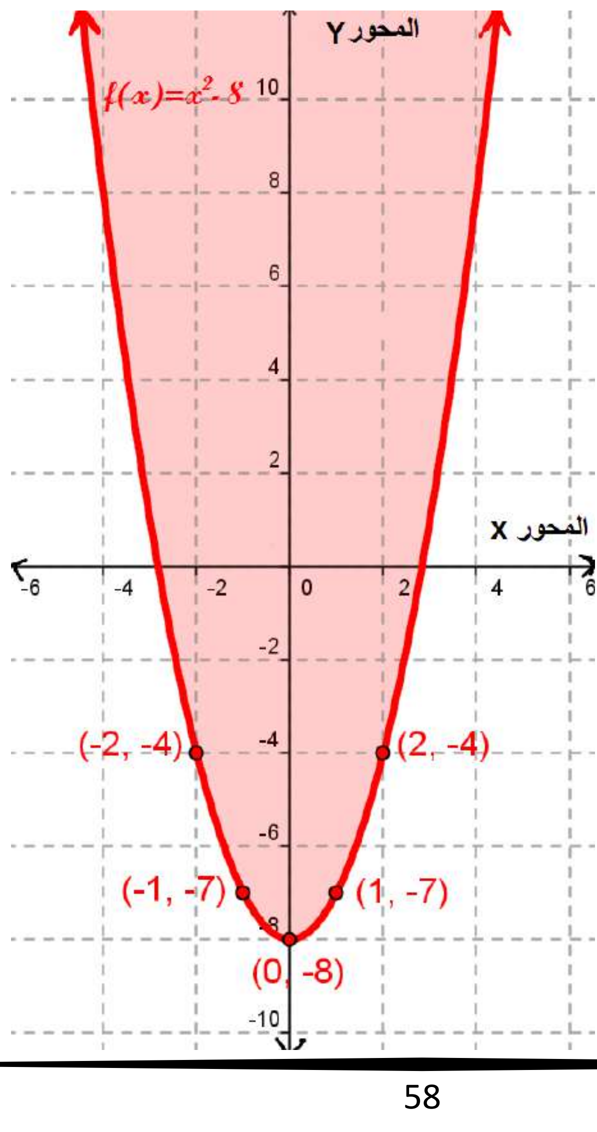


مثال 13 :- ارسم المخطط البياني للدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-8$

الحل :- إن منحني الدالة هذه يمكن أن ينتج عن انسحاب للمنحني الذي يمثل الدالة $f(x)=x^2$ نحو الاتجاه السالب للمحور y بمقدار 8 وحدات .

$$f(-2)=(-2)^2-8=-4 \Rightarrow (-2,-4)$$
$$f(-1)=(-1)^2-8=-7 \Rightarrow (-1,-7)$$
$$f(0)=0^2-8=-8 \Rightarrow (0,-8)$$
$$f(1)=1^2-8=-7 \Rightarrow (1,-7)$$
$$f(2)=2^2-8=-4 \Rightarrow (2,-4)$$

وبتمثيل النقاط الخمس هذه على المحاور الإحداثية والتوصيل بينها بخط منحني يظهر الشكل المطلوب وهو قطع مكافئ أيضاً ونلاحظ بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال (11) انسحاب جميع نقاط منحني القطع المكافئ بمقدار 8 وحدات بالاتجاه السالب للمحور y (أي نحو الأسفل) .



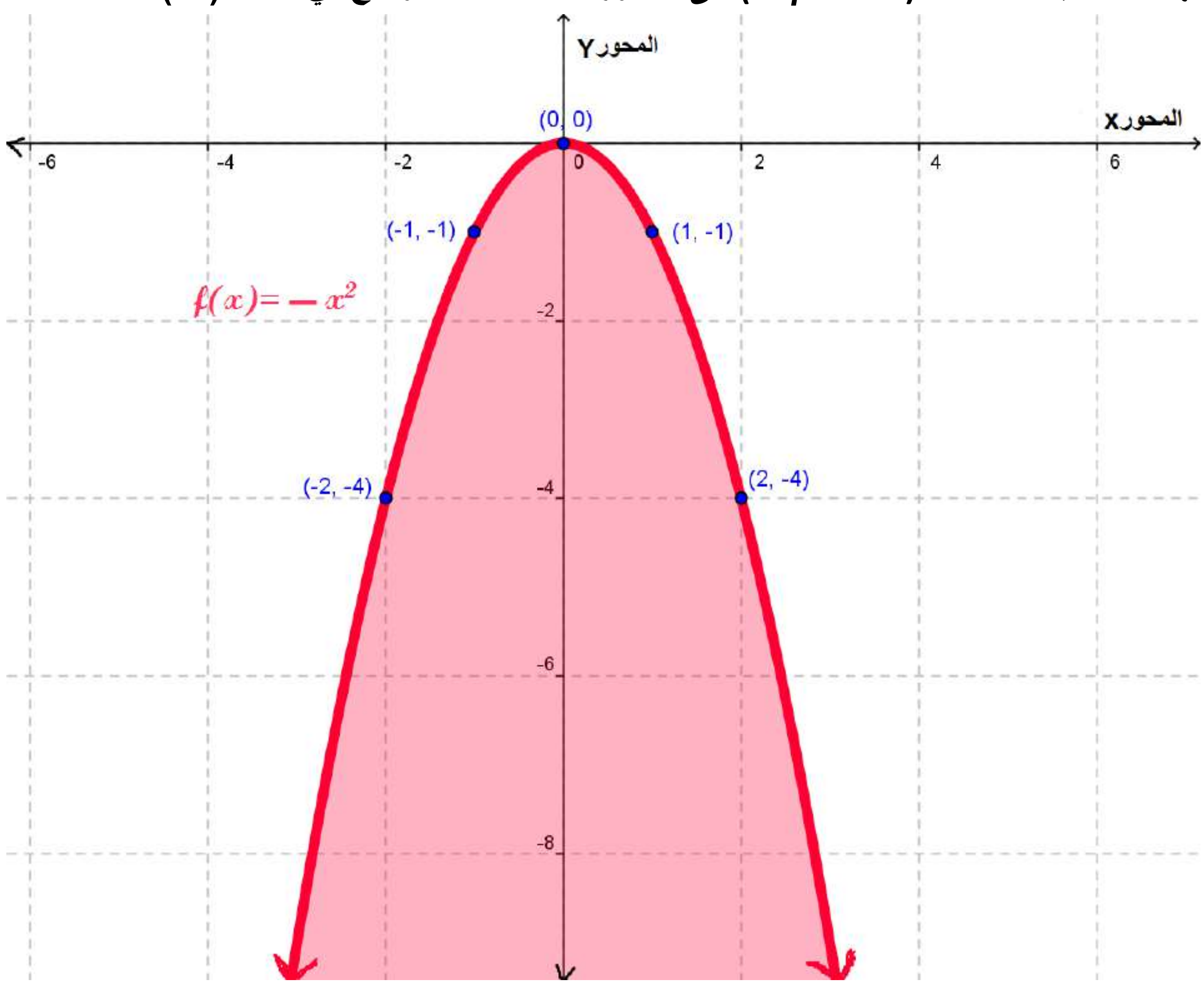
مثال 14 :- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2$

الحل :- أن منحني الدالة هذه يمكن أن ينتج عن انعكاس للمنحني الذي يمثل الدالة $f(x) = x^2$ على المحور y.

نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = -(-2)^2 = -4 \Rightarrow (-2, -4)$$
$$f(-1) = -(-1)^2 = -1 \Rightarrow (-1, -1)$$
$$f(0) = -(0)^2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$
$$f(1) = -(1)^2 = -1 \Rightarrow (1, -1)$$
$$f(2) = -(2)^2 = -4 \Rightarrow (2, -4)$$

وبتمثيل النقاط الخمس هذه على المحاور الأحداثية والتوصيل بينها بخط منحني يظهر الشكل المطلوب وهو قطع مكافئ أيضاً ونلاحظ بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال (11) ان المخطط البياني لهذه الدالة يمثل انعكاساً (*Reflection*)على المحور x للمخطط الموضح في المثال (11) .



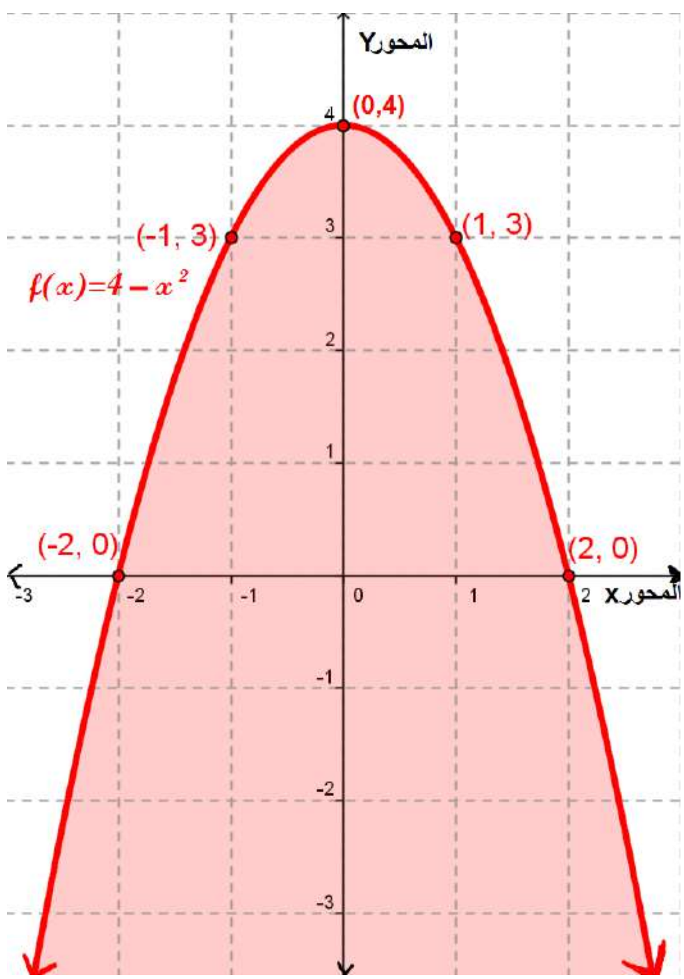
مثال 15 :- ارسم المخطط البياني للدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4-x^2$

الحل :- إن منحني الدالة هذه يمكن أن ينتج عن انسحاب للمنحني الذي يمثل الدالة $f(x)=-x^2$ بالاتجاه الموجب للمحور y بمقدار 4 وحدات

نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2,-1,0,1,2\}$

$$f(-2)=4-(-2)^2=0\Rightarrow(-2,0)$$
$$f(-1)=4-(-1)^2=3\Rightarrow(-1,3)$$
$$f(0)=4-(0)^2=4\Rightarrow(0,4)$$
$$f(1)=4-(1)^2=3\Rightarrow(1,3)$$
$$f(2)=4-(2)^2=0\Rightarrow(2,0)$$

وبتمثيل النقاط الخمس هذه على المحاور الإحداثية والتوصيل بينها بخط منحني يظهر الشكل المطلوب وهو قطع مكافئ أيضاً ونلاحظ بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال السابق (14) انسحاب جميع نقاط منحني القطع المكافئ بمقدار 4 وحدات بالاتجاه الموجب للمحور y (أي نحو الأعلى) .



(4-2-2) التمثيل البياني للدالة من الدرجة الثالثة بالصورتين

$f(x) = (x+a)^3$ و $f(x) = ax^3 + b$

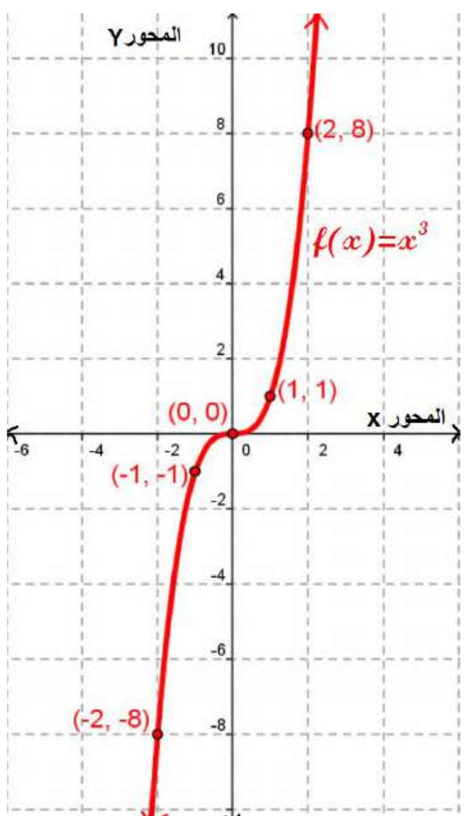
إن الشكل العام للدوال من الدرجة الثالثة التي سنتعلم تمثيله بيانياً هو $f(x) = ax^3 + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$ ويمكن رسم المنحني الذي يمثل بيان الدوال من النوع هذا بالأسلوب نفسه الذي أتبعناه مع الدوال من الدرجة الثانية في البند السابق وسوف نلاحظ أن المخطط البياني للنوع هذا من الدوال يكون متناظراً مع نقطة الاصل .

مثال 16 :- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = (-2)^3 = -8 \Rightarrow (-2, -8)$$
$$f(-1) = (-1)^3 = -1 \Rightarrow (-1, -1)$$
$$f(0) = 0^3 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$
$$f(1) = 1^3 = 1 \Rightarrow (1, 1)$$
$$f(2) = 2^3 = 8 \Rightarrow (2, 8)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الأحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالازواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب ومن الواضح ان المخطط البياني للدالة متناظر حول نقطة الاصل.

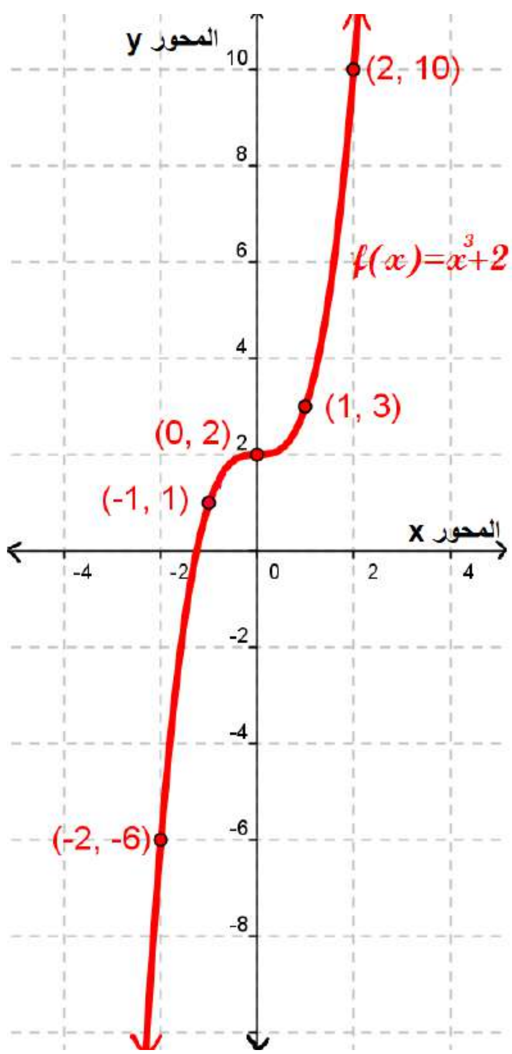


مثال17:- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = (-2)^3 + 2 = -6 \Rightarrow (-2, -6)$$
$$f(-1) = (-1)^3 + 2 = 1 \Rightarrow (-1, 1)$$
$$f(0) = 0^3 + 2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$$
$$f(1) = 1^3 + 2 = 3 \Rightarrow (1, 3)$$
$$f(2) = 2^3 + 2 = 10 \Rightarrow (2, 10)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الإحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالأزواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب ومن الواضح بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال السابق (16) انسحاب جميع نقاط المنحني بمقدار وحدتين بالاتجاه الموجب للمحور y **أي (نحو الأعلى) .**

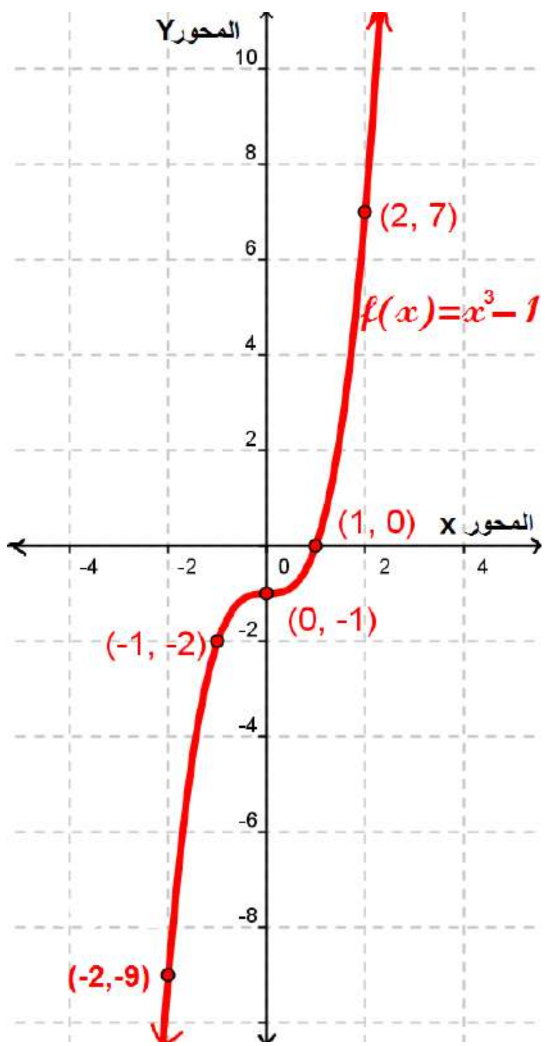


مثال18:- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = (-2)^3 - 1 = -9 \Rightarrow (-2, -9)$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 \Rightarrow (-1, -2)$$
$$f(0) = 0^3 - 1 = -1 \Rightarrow (0, -1)$$
$$f(1) = 1^3 - 1 = 0 \Rightarrow (1, 0)$$
$$f(2) = 2^3 - 1 = 7 \Rightarrow (2, 7)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الإحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالأزواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب ومن الواضح بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال (16) انسحاب جميع نقاط المنحني بمقدار وحدة واحدة بالأتجاه السالب للمحور y **(** أي **نحو الأسفل).**

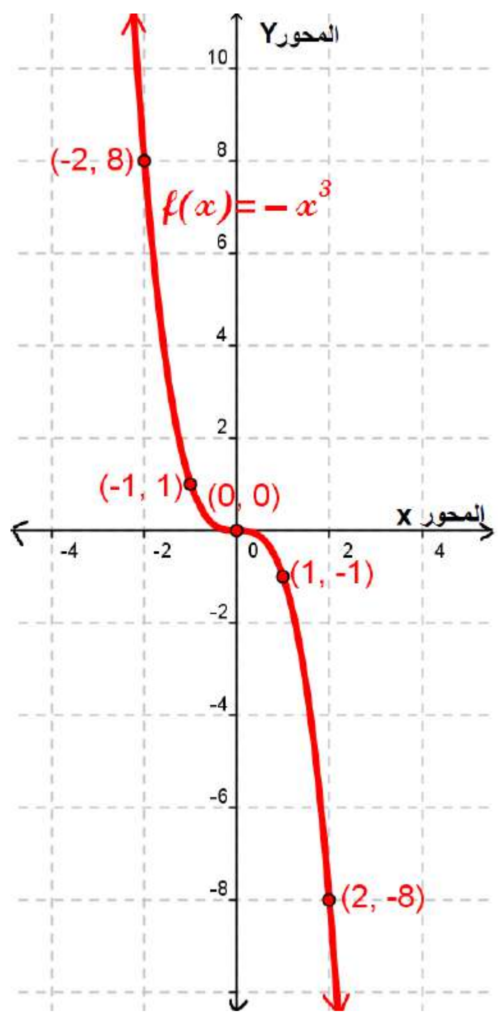


مثال19:- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^3$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = -(-2)^3 = 8 \Rightarrow (-2, 8)$$
$$f(-1) = -(-1)^3 = 1 \Rightarrow (-1, 1)$$
$$f(0) = -(0)^3 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$
$$f(1) = -(1)^3 = -1 \Rightarrow (1, -1)$$
$$f(2) = -(2)^3 = -8 \Rightarrow (2, -8)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الإحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالازواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب ومن الواضح بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال (16) إن المخطط البياني لهذه الدالة يمثل انعكاساً على المحور x للمخطط الموضح في المثال (16) .

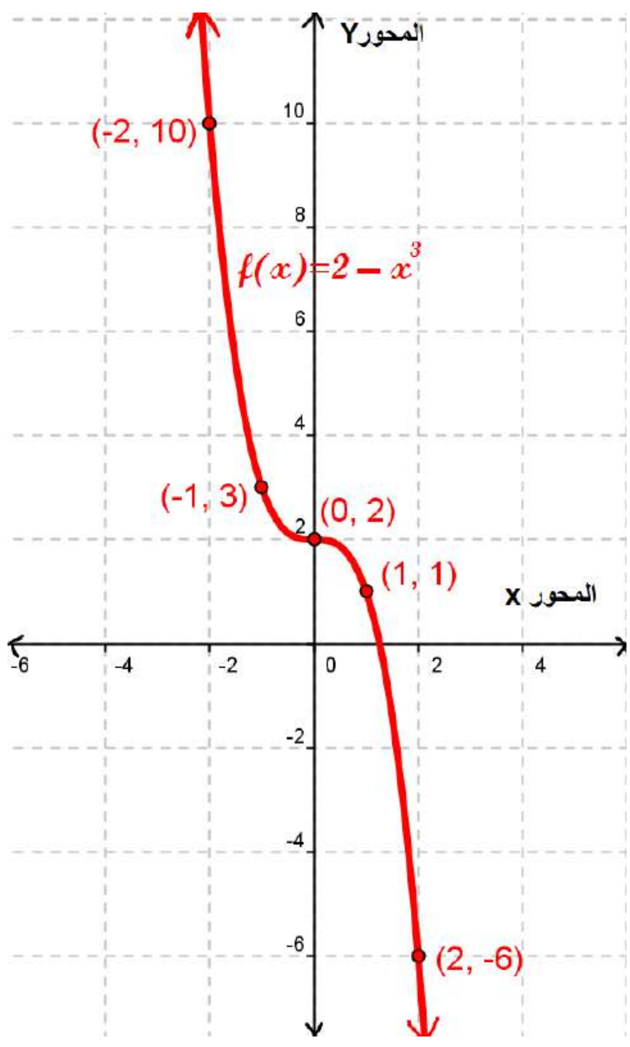


مثال20:- ارسم المخطط البياني للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - x^3$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$f(-2) = 2 - (-2)^3 = 10 \Rightarrow (-2, 10)$$
$$f(-1) = 2 - (-1)^3 = 3 \Rightarrow (-1, 3)$$
$$f(0) = 2 - (0)^3 = 2 \Rightarrow (0, 2)$$
$$f(1) = 2 - (1)^3 = 1 \Rightarrow (1, 1)$$
$$f(2) = 2 - (2)^3 = -6 \Rightarrow (2, -6)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الأحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالازواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب ومن الواضح بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال (19) انسحاب جميع نقاط المنحني بمقدار وحدتين بالأتجاه الموجب للمحو y (أي نحو الأعلى) .



مثال21:- ارسم المخطط البياني للدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(1-x)^3$

الحل :- نستخرج قيم الدالة بتعويض خمس قيم للمتغير x هي $\{-2,-1,0,1,2\}$

$$f(-2)=(1-(-2))^3=3^3=27 \Rightarrow (-2,27)$$

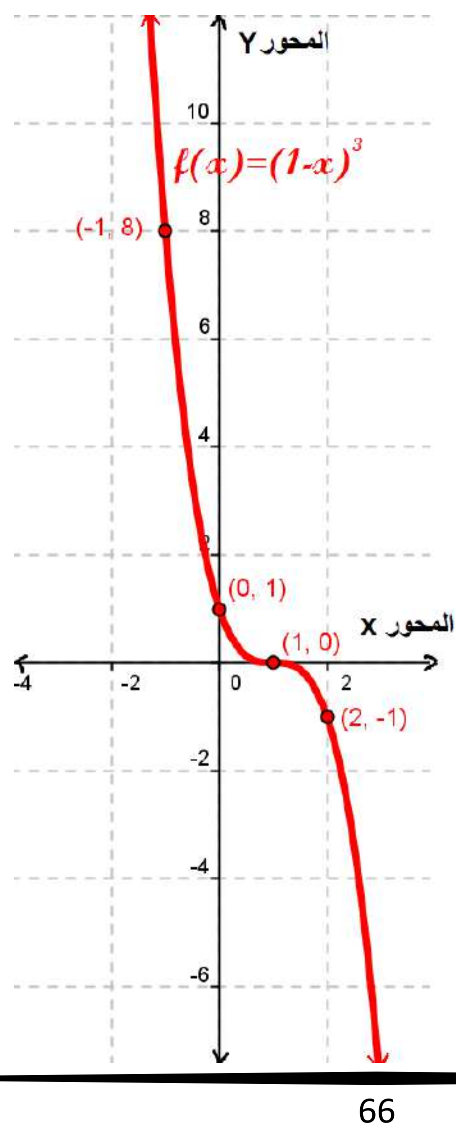
$$f(-1)=(1-(-1))^3=2^3=8 \Rightarrow (-1,8)$$

$$f(0)=(1-0)^3=1^3=1 \Rightarrow (0,1)$$

$$f(1)=(1-1)^3=0 \Rightarrow (1,0)$$

$$f(2)=(1-2)^3=(-1)^3=-1 \Rightarrow (2,-1)$$

نرسم على ورق المربعات المستوي الإحداثي ونسقط عليه النقاط الممثلة بالأزواج المرتبة الخمسة أعلاه ونوصل بينهما بخط منحني (دون استخدام المسطرة) ليظهر لنا الشكل المطلوب ومن الواضح بالمقارنة مع المخطط البياني للدالة في المثال (19) انسحاب جميع نقاط المنحني بمقدار وحدة واحدة بالاتجاه الموجب للمحور x **(أي نحو اليمين) .**



تمارين (1-2)

1. إذا كان $f(x) = x^2 - 6x - 4$ فما قيمة $f(\sqrt{2})$, $f(3)$, $f(-1)$ ؟
2. إذا كان $f(x) = x^2 + 1$ فما قيمة $f(a) + 1$, $f(4)$, $f(a+1)$, $[f(a)]^2$, $f(2a)$ ؟
حيث a عدد ثابت ينتمي الى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
3. إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ أثبت أن :- $f(a+1) + f(a-1) - 2f(a) = 4$
حيث a عدد ثابت ينتمي الى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4. جد أوسع مجال لكل من الدوال الآتية :-

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{3}x^2 - 3$

b) $f(x) = \frac{2x+6}{x^2-x-6}$

c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

5. ارسم المخطط البياني لكل من الدوال الآتية على ورق المربعات :-

a) $f(x) = 8$

b) $f(x) = 3x - 6$

c) $f(x) = 8 - 2x$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = 1 - x^2$

f) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

g) $f(x) = x^3 - 2$

h) $f(x) = 5 - x^3$

i) $f(x) = x^3 - x$

j) $f(x) = x - x^3$

(3-2) التغير (Proportion or Variation)

مقدمة:

كثيراً ما نلاحظ في حياتنا اليومية ارتباط الأشياء ببعضها البعض فمثلاً نستطيع بسهولة ملاحظة أن التغير في سرعة السيارة مثلاً يصحبه تغير في المسافة المقطوعة، وإن غلة الدونم الواحد من الأرض المزروعة بالحنطة يتغير تبعاً لكمية البذور المخصصة للدونم الواحد ... ألخ من الامثلة المشابهة.

ولا بد لنا أن نميز بين نوعين من التغير :-

الأول هو التغير الطردي والذي تنسجم فيه الكميتان المتغيرتان من ناحية الزيادة أو النقصان حيث أن أي زيادة في أحدهما تسبب زيادة بالنسبة ذاتها لدى الكمية الاخرى، وأي نقصان في أحدهما يسبب نقصاناً بالنسبة ذاتها لدى الكمية الاخرى .

والثاني هو التغير العكسي والذي تتخالف فيه الكميتان المتغيرتان من ناحية الزيادة والنقصان حيث أن أي زيادة في أحدهما تسبب نقصاناً بالنسبة ذاتها لدى الكمية الاخرى وأي نقصان في أحدهما يسبب زيادة بالنسبة ذاتها لدى الكمية الاخرى .

ومن أمثلة التغير الطردي :-

1. **إذا كان سعر الكيلوغرام من محصول البطاطا ثابتاً فإن عدد الكيلوغرامات التي يحصل عليها المستهلك يتغير طردياً مع المبلغ الذي يدفعه للبائع .**
2. **المقاومة في السلك الكهربائي تتغير طردياً تبعاً لطوله (عند ثبوت نوع المعدن المصنوع منه).**
3. **وزن المحراث يتغير طردياً مع حجمه (عند ثبوت نوع المعدن المصنوع منه).**

ومن أمثلة التغير العكسي :-

1. **إذا كانت لدينا قطعة أرض زراعية مستطيلة الشكل فأن طول القطعة يتغير عكسياً مع عرضها(عند ثبوت مساحتها) .**
2. **حجم الغاز يتغير عكسياً مع الضغط المسلط عليه (عند ثبوت درجة الحرارة) .**
3. **المقاومة في السلك الكهربائي تتغير عكسياً مع مربع نصف قطره (عند ثبوت نوع المعدن المصنوع منه).**

(1-3-2) التغير الطردي(*Direct Proportion*)

يقال أن الكمية x تتغير طردياً تبعاً لتغير الكمية y إذا ارتبطت الكميتان x, y ببعضهما البعض بحيث أن أي تغير في قيمة y يصحبه تغير في قيمة x بالنسبة ذاتها.

- يسمى المتغير y بالمتغير المستقل ، أما المتغير x فيسمى المتغير التابع .
- يرمز لعملية التغير بالرمز ($\propto$)
- يعبر عن العبارة ((x تتغير طردياً تبعاً لتغير y)) بالرموز الرياضية كما يلي :-

$$\boxed{x \propto y \Rightarrow x = k.y}$$

حيث k عدد ثابت ينتمي الى $\mathbb{R}^+$ (مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) ويسمى ثابت التغير (أو ثابت التناسب) .

- إذا كان x تتغير طردياً تبعاً لتغير y فإن :-

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{او} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}}$$

مثال22:- إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان $y = 9$ عندما $x = 3$ جد قيمة ثابت التغير .

الحل :-

$$x \propto y \Rightarrow x = k \times y$$
$$3 = k \times 9$$
$$k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال23:- إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان $y = 28$ عندما $x = 7$ جد قيمة x عندما $y = 60$

الحل :- يمكننا حل المثال بطريقتين :-

الطريقة الأولى:

$$x \propto y \Rightarrow x = k \times y$$
$$7 = k \times 28$$
$$k = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$
$$\therefore x = \frac{1}{4} \times y$$
$$x = \frac{1}{4} \times 60 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

الطريقة الثانية :-

$$x \propto y \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{7}{x_2} = \frac{28}{60}$$

$$\frac{7}{x_2} = \frac{7}{15} \rightarrow \boxed{x_2 = 15}$$

مثال 24:- ليكن كل من x, y متغيرين حقيقيين مرتبطين بعلاقة ما ، فإن أخذت x القيمتين $(1.6 \quad , \quad 5)$ وكانت قيمتا y المناظرتين لهما هي$(4.8 \quad , \quad 15)$ على الترتيب . بين نوع العلاقة بين x, y ؟

الحل :-

$$x_1 = 5 \quad ، \; x_2 = 1.6$$

$$y_1 = 15 \quad ، \; y_2 = 4.8$$

سوف نحل المثال بالاعتماد على العلاقة الآتية:-

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{1.6} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{15}{4.8} = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad \Rightarrow x \propto y$$

أي أن العلاقة هي علاقة تغير طردي .

ملاحظة :- يمكن حل السؤال بطريقة أخرى باستخدام العلاقة الآتية :-

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

وكما يلي :-

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{1.6}{4.8} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \rightarrow x \propto y$$

أي إن العلاقة هي علاقة تغير طردي .

مثال25:- إذا كان $x \propto y$ أثبت أن $(x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$

الحل :- بما أن $x \propto y \Rightarrow x = k \times y$

لأجل أثبات $(x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$ علينا أن نبرهن أن

$$(x^3 + 2xy^2) = k \times (\, x^2y)$$

اي ان :-

$$\frac{x^3 + 2xy^2}{x^2y} = L \qquad ; L \text{ عدد ثابت}$$

ويتم ذلك كالاتي :-

بتعويض $x = k.y$

$$\frac{x^3 + 2xy^2}{x^2y} = \frac{(k.y)^3 + 2(k.y).y^2}{(k.y)^2.y}$$

$$= \frac{k^3y^3 + 2ky^3}{k^2y^3} = \frac{y^3(k^3 + 2k)}{y^3k^2} = \frac{k^3 + 2k}{k^2} = L$$

حيث أن كون k عدداً ثابتاً يقتضي أن يكون المقدار L عدداً ثابتاً أيضاً .

$$\therefore (x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$$

(2-3-2) التغير العكسي (*Inverse Proportion*)

يقال ان الكمية x تتغير عكسياً تبعاً لتغير الكمية y إذا ارتبطت الكميتان x, y ببعضهما البعض بحيث أن أي تغير في قيمة y يصحبه تغيراً مخالفاً في قيمة x ولكن بالنسبة ذاتها .

- **يعبر عن العبارة ((x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y)) بالرموز الرياضية كما يلي :-**

$$\boxed{x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k}{y} \quad \text{او} \quad xy = k}$$

حيث k عدد ثابت ينتمي إلى $\mathbb{R}^+$ ويسمى ثابت التغير.

- **إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y فأن :-**

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \qquad \text{او} \qquad \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}}$$

مثال26:- إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y وكان $y = 12$ عندما $x = 3$
جد قيمة ثابت التغير .

الحل :-

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k}{y}$$

$$3 = \frac{k}{12}$$

$$k = 3.(12) = 36$$

مثال27:- إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y وكان $y = 2$ عندما $x = 8$
جد قيمة x عندما $y = 0.8$

الحل :- يمكننا حل المثال بطريقتين :-

الطريقة الاولى:-

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k}{y}$$

$$8 = \frac{k}{2}$$

$$k = 8 \times 2 = 16$$

$$\therefore x = \frac{16}{y}$$

$$x = \frac{16}{0.8} = \frac{160}{8} \Rightarrow \boxed{x = 20}$$

الطريقة الثانية :-

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{0.8}{2}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{8}{20} \Rightarrow \boxed{x_2 = 20}$$

مثال 28:- إذا كانت y تتغير تغيراً عكسياً تبعاً لتغير مربع x وكان $x = 3$ عندما $y = 4$ جد قيمة ثابت التغير ؟

الحل :

$$y \propto \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = \frac{k}{x^2}$$

$$4 = \frac{k}{3^2}$$

$$4 = \frac{k}{9}$$

$$k = 4 \times 9 = 36$$

مثال29:- إذا كان $x \propto \frac{1}{y}$ ، $y \propto \frac{1}{z}$ اثبت أن $x \propto z$

الحل :-

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k_1}{y} \ , k_1 \in \mathbb{R}^+$$

$$y \propto \frac{1}{z} \rightarrow y = \frac{k_2}{z} \ , k_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$x = \frac{k_1}{\frac{k_2}{z}}$$

$$x = k_1 \times \frac{z}{k_2}$$

$$x = \frac{k_1}{k_2} \times z$$

$$x = L \times z \quad , \left(L = \frac{k_1}{k_2}\right)$$

وبما ان كلاً من k_1 ، k_2 ثابت لذلك فان $L = \frac{k_1}{k_2}$ يكون مقداراً ثابتاً أيضاً.

إذن $x = L \times z \Rightarrow x \propto z$

مثال30:- ليكن كل من x, y متغيرين حقيقيين مرتبطين بعلاقة ما ، فإذا أخذ المتغيران x, y القيمتين ($10, 22$) على الترتيب وازدادت قيمة $x,$ لتصبح 15 وصاحب ذلك نقصان في قيمة y لتصبح 12 فهل إن العلاقة بين x, y عكسية ؟

الحل:

$$x_1 = 10 \quad ، \; x_2 = 15 \qquad\qquad y_1 = 22 \quad ، \; y_2 = 12$$

سوف نحل المثال بالاعتماد على العلاقة الآتية

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_2}{y_1}$$

أي أن العلاقة ليست علاقة تغير عكسي .

ملاحظة :- يمكن حل السؤال بطريقة أخرى باستخدام العلاقة الآتية $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{15}{22}$$

$$\frac{x_1}{y_2} \neq \frac{x_2}{y_1}$$

أي أن العلاقة ليست علاقة تغير عكسي.

مثال31:- من المعلوم ان حجم الغاز يتغير عكسياً مع الضغط المسلط عليه عند ثبوت درجه الحرارة . فإذا كان لدينا غاز محصور في حاوية بحجم $480cm^3$ ومضغوط بما يساوي 12 ضغط جوي فكم سيكون حجم الغاز إذا تم تخفيف الضغط المسلط عليه الى 8 ضغط جوي؟

الحل :-

الطريقة الاولى :-

بفرض إن حجم الغاز هو V وإن الضغط المسلط عليه هو P يكون:-

$$V \propto \frac{1}{P} \;\Rightarrow\; V = \frac{k}{P}$$

$$k = V.P$$

$$k = 480.(12) = 5760$$

لذلك يكون

$$5760 = V.8$$

$$\therefore V = \frac{5760}{8} = 720\ cm^3$$ **الحجم الجديد للغاز**

طريقة ثانية :-

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

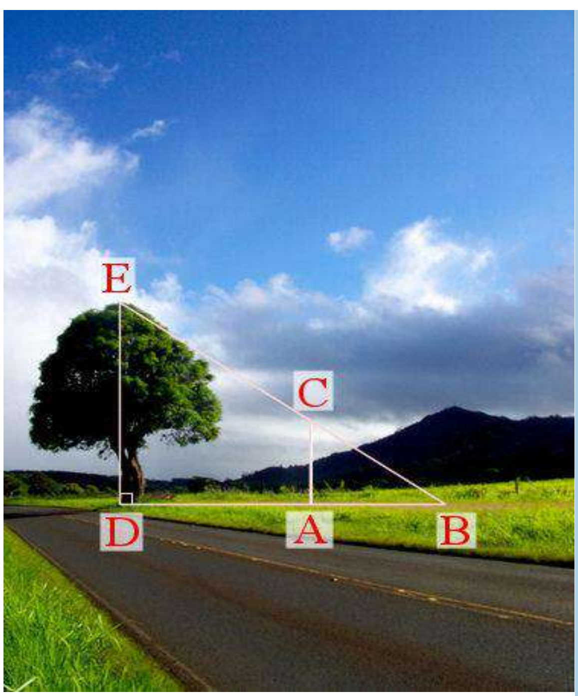
$$\frac{480}{V_2} = \frac{8}{12}$$

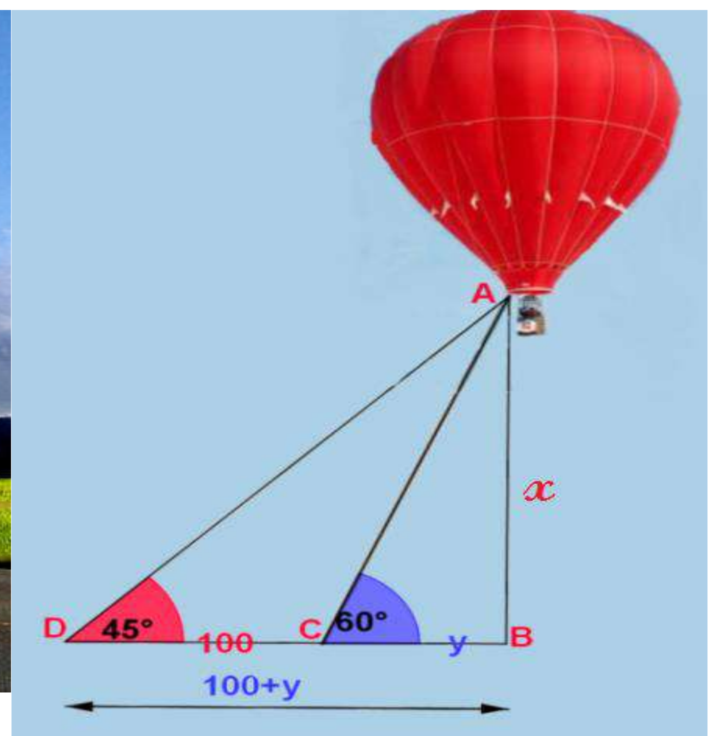
$$V_2 = \frac{480.(12)}{8} = 720cm^3$$ **الحجم الجديد للغاز**

تمارين (2-2)

1. إذا كان $\sqrt{x} \propto \sqrt[3]{y}$ وكانت $y = 27$ عندما $x = 4$ فما قيمة x عندما $y = -1$ ؟
2. إذا كان y يتغير عكسياً تبعاً لتغير x وكان $x = 16$ عندما $y = 25$ ، فما قيمة y عندما $x = 20$ ؟
3. إذا كان x يتغير عكسياً تبعاً لتغير y^2 وكان $x = 8$ عندما $y = 3$ ، فما قيمة y عندما $x = 2$ ؟
4. إذا كان x يتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان $y = 10$ عندما $x = 5$ ، فما قيمة y عندما $x = 15$ ؟
5. إذا كان $x \propto y$ أثبت أن $x^2 - y^2 \propto x \times y$.
6. إذا كانت $7x + 5y \propto 4x + 3y$ اثبت أن $x \propto y$
7. إذا كان $x \propto y$ و $v \propto w$ اثبت أن $x \times v \propto y \times w$
8. إذا كانت (18) ماكنة متساوية القدرة لإنتاج الالبان تنتج (24000) قدحاً من اللبن في (8) أيام .فما عدد الاقداح التي يمكن أن تنتجها (45) ماكنة بالقدرة نفسها في (14) يوماً؟
9. مكبس تمور ميكانيكي يسلط ضغطاً قدره ($78.4 \ N/m^2$) على كمية من التمر حجمها ($1200 \ m^3$) لتتشكل في القالب المخصص لها . كم يجب ان يكون الضغط المسلط لتشكيل كمية اخرى من التمر حجمها ($3600 \ m^3$) في القالب نفسه ؟
10. إذا كانت V تمثل سرعة سيارة نقل المزروعات (بيك أب) وكانت V تتغير بتغيـــــــر الزمن t . فإذا كانت السرعة تساوي $48 \ km/h$ بعد مرور ($0.15 \ h$) من لحظة بدء الحركة . جد الزمن اللازم لتصل السيارة الى سرعة $80 \ km/h$ من بدء الحركة .
11. من المعلوم إن شدة الصوت تتغير عكسياً مع مربع البعد عن مصدر الصوت . فإذا رمزنا لشدة الصوت بالرمز (d) والبعد عن مصدر الصوت (S) جد مقدار التغير في شدة الصوت لسامع كان أولاً على بعد $440 \ m$ عن مصدر الصوت ثم أصبح على بعد $1760 \ m$ عنه .


الفصل الثالث
حساب المثلثات


E
C
D
A
B


A
x
D
45°
100
C
60°
y
B
100+y

الاهداف السلوكية:

يجب على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن: -

1. **يدرك مفهوم الزاوية وقياسها.**
2. **يميز بين نظامي قياس الزاوية الستيني والدائري وكيفية التحويل من نظام لآخر.**
3. **يتعرف على النسب المثلثية ومقلوباتها لزاوية حادة.**
4. **يتعرف على بعض العلاقات الأساسية بين النسب المثلثية.**
5. **يجيد استخدام الحاسبة الالكترونية اليدوية في إيجاد قيم النسب المثلثية.**
6. **يتعرف على كيفية إيجاد النسب المثلثية للزوايا الخاصة.**
7. **يدرك المفهوم الهندسي لزاويتي الارتفاع والانخفاض.**
8. **يحل مسائل حياتية وعملية باستخدام مفهوم زاويتي الارتفاع والانخفاض.**

الفصل الثالث

حساب المثلثات

(1-3) الزاوية.

(2-3) قياس الزاوية.

(1-2-3) القياس الستيني .

(2-2-3) القياس الدائري.

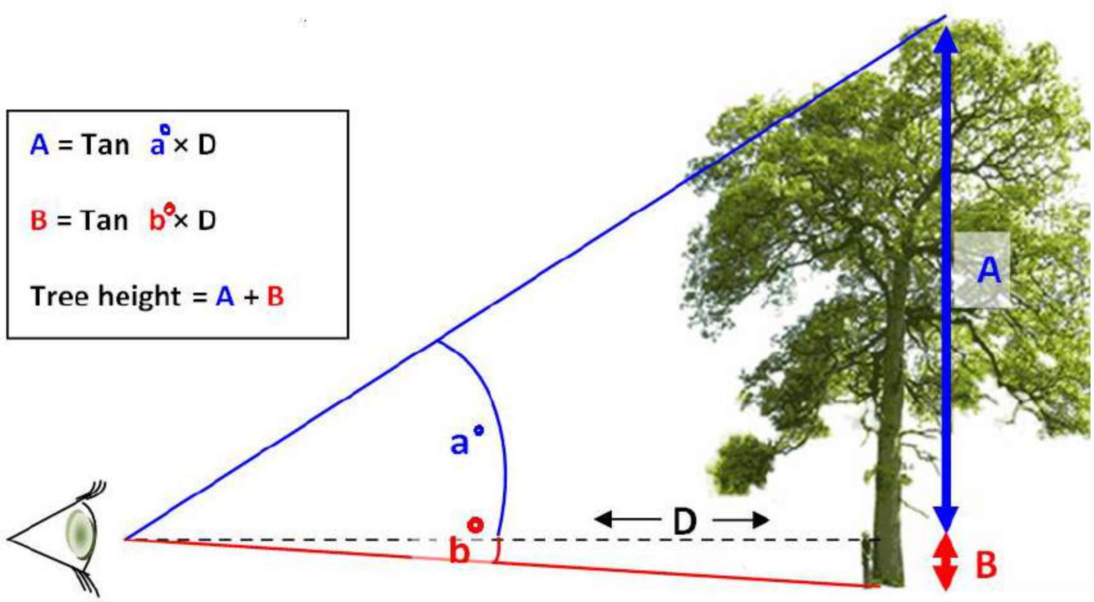
(3-2-3) العلاقة بين القياسين الستيني والدائري.

(3-3) النسب المثلثية ومقلوباتها لزاوية حادة وبعض العلاقات الاساسية.

(1-3-3) دائرة الوحدة.

(4-3) النسب المثلثية للزوايا الخاصة.

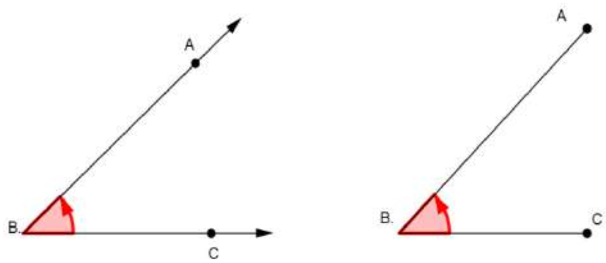
(5-3) زاويتا الارتفاع والانخفاض.



الفصل الثالث

حساب المثلثات

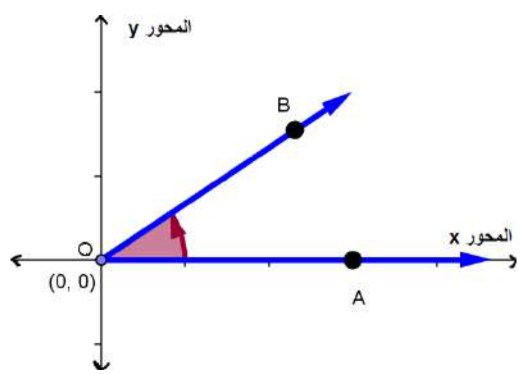
Trigonometry Calculations



(3-1) الزاوية (*Angle*):- هي الشكل الهندسي المتكون من التقاء شعاعين أو قطعتي مستقيم لهما نقطة بداية واحدة.
تسمى نقطة التقاء الشعاعان أو قطعتا المستقيم ((رأس الزاوية)) ويسمى الشعاعان أو قطعتا المستقيمين ((ضلعا الزاوية)) .

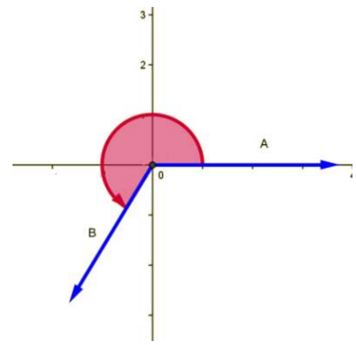
يرمز للزاوية رياضياً بأحد الرمزين الآتيين $\measuredangle ABC$ أو $A\widehat{B}C$ وقد اتفق على تسمية الشعاع الذي نبدأ به قراءة تسمية الزاوية بالضلع الابتدائي أو (الضلع الأول) وتسمية الشعاع الاخر بالضلع النهائي أو (الضلع الثاني) فإذا أردنا أن نكتب تسمية للزاوية المبينة في الشكل أعلاه باعتبار $\overrightarrow{BA}$ ضلعها الأول فأننا نكتب الرمز$\measuredangle ABC$ أما إذا اعتبرنا ضلعها الأول هو $\overrightarrow{BC}$ فأن الرمز سيكون$\measuredangle CBA$. لذلك فإنه عندما يطلب التمييز بين ضلعي الزاوية أيهما الأول وأيهما الثاني عند كتابة تسميتها فإننا نفضل كتابتها بالصورة $\measuredangle CBA$ ليكون ضلعها الأول هو $\overrightarrow{BC}$ وضلعها الثاني هو $\overrightarrow{BA}$ ولذلك تسمى (زاوية موجهة) (*Directed Angle*) بهدف تمييزها عن الزاوية الاعتيادية والتي لا يتم مراعاة الترتيب في ضلعيها عند تسميتها .

يقال للزاوية $\measuredangle AOB$ بأنها زاوية موجهة في الوضع القياسي عندما يقع رأسها في نقطة الأصل بالمحاور الكارتيزية المتعامدة بحيث يكون ضلعها الأول منطبقاً على الجزء الموجب من المحور x وضلعها الآخر يقع في أحد الأرباع الأربعة وكما موضح في الشكل الآتي :

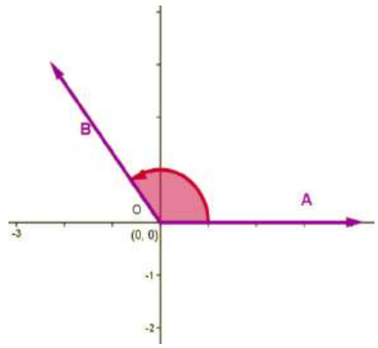


ويقال للزاوية $\measuredangle AOB$ الموجهة في الوضع القياسي انها تقع في الربع الأول إذا وقع ضلعها الثاني في الربع الأول وهكذا بالنسبة لبقية الأرباع والاشكال الآتية توضح ذلك

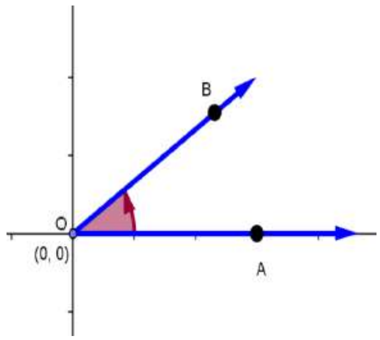
زاوية موجهة في الربع الثالث

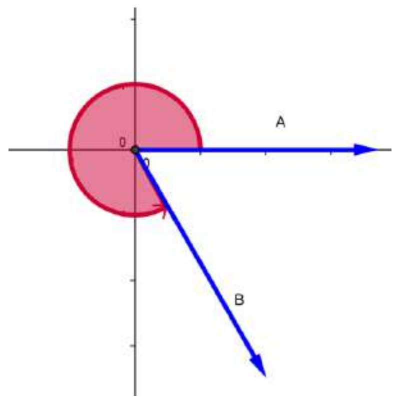


زاوية موجهة في الربع الثاني



زاوية موجهة في الربع الأول





زاوية موجهة في الربع الرابع

(2-3) قياس الزاوية:-

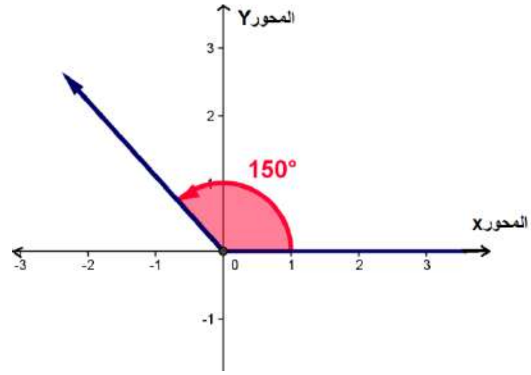
تقاس الزوايا بنظامين هما :-

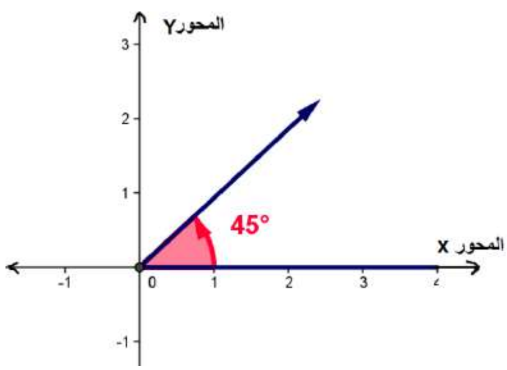
1. **القياس الستيني (التقدير الستيني) (*Degree Measure*)**
2. **القياس الدائري (التقدير الدائري أو النصف قطري)(*Radian Measure*)**

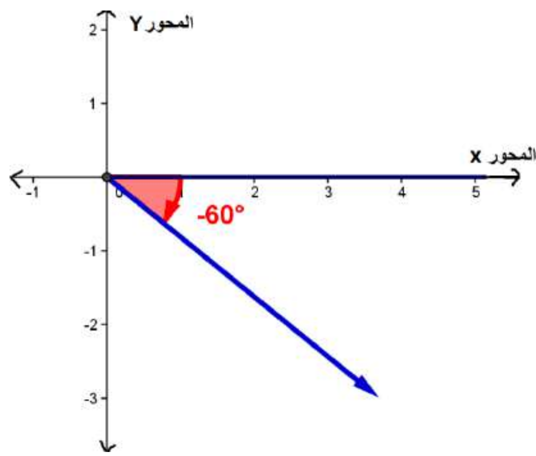
(1-2-3) القياس الستيني

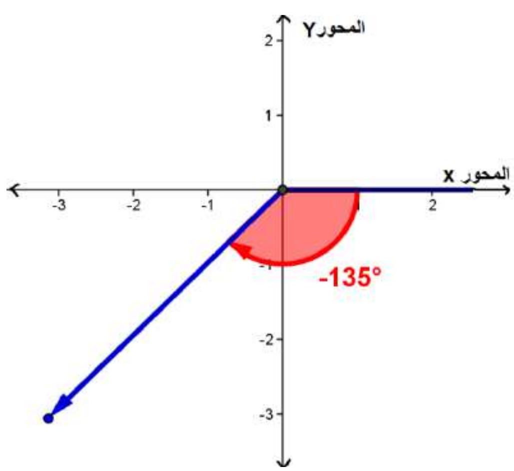
وهو النظام الذي بموجبه تقاس الزاوية ووحدة القياس فيه هي الدرجات. والدرجة تمثل الزاوية المركزية التي يحصر شعاعيها قوساً طوله يعادل $\frac{1}{360}$ من محيط الدائرة التي مركزها رأس الزاوية . وهذه الزاوية اتخذت كوحدة قياس في النظام الستيني (التقدير الستيني) وسميت (درجة) ستينية واحدة يرمز لها بالرمز $1°$ وقسمت الدرجة الستينية الواحدة الى 60 وحدة متساوية تسمى كل منها (دقيقة) واحدة يرمز لها بالرمز $1'$ كما قسمت الدقيقة الواحدة الى 60 وحدة متساوية تسمى كل منها (ثانية) ويرمز لها بالرمز $1''$. وحيث أن الزاوية القائمة تقابل قوساً طوله يساوي ربع محيط الدائرة لذلك فأن قياس الزاوية القائمة هو $90°$، وبالمثل يكون قياس الزاوية المستقيمة$180°$...... وهكذا .

تكون الزاوية موجبة القياس إذا كان أتجاه دوران الشعاع المولد لها ابتداءً من الضلع الأول وانتهاءً بالضلع الثاني بعكس أتجاه دوران عقربي الساعة.
وتكون الزاوية سالبة القياس إذا كان أتجاه دوران الشعاع المولد لها ابتداءً من الضلع الأول وانتهاءً بالضلع الثاني بنفس أتجاه دوران عقربي الساعة.
ولمعرفة اتجاه الدوران نرسم قوساً في نهايته سهم يبدأ من نقطة تنتمي الى الضلع الأول للزاوية وينتهي بنقطة تنتمي الى الضلع الثاني لها وكما موضح في الأشكال ادناه:

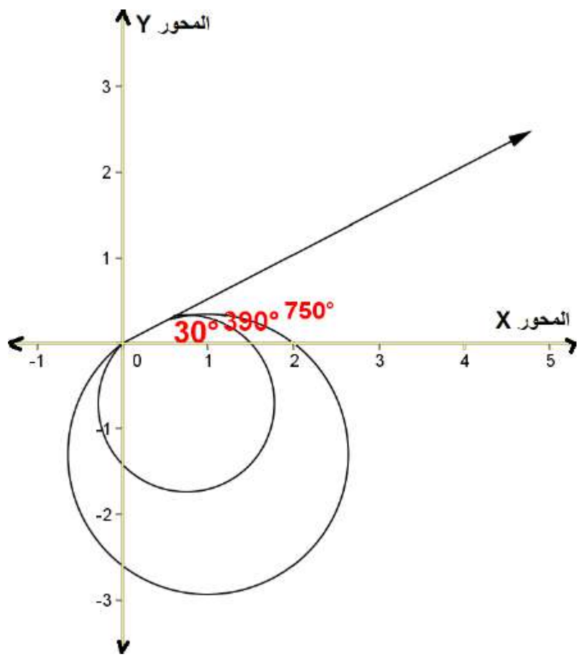








قد يدور الشعاع بأحد الاتجاهين (الموجب أو السالب) دورة كاملة أو عدة دورات وبهذا نحصل على قياس آخر أو عدة قياسات للزاوية ذاتها.
فمثلاً قياس الزاوية $\sphericalangle AOB = 30°$ ولكن :-
$390° = 30° + 360°$ هو قياس آخر لها كما إن
$750° = 30° + 2 \times (360°)$ هو قياس آخر لها
وهكذا يتضح لنا أن الزاوية الواحدة لها عدد غير منته من القياسات الموجبة أو السالبة.



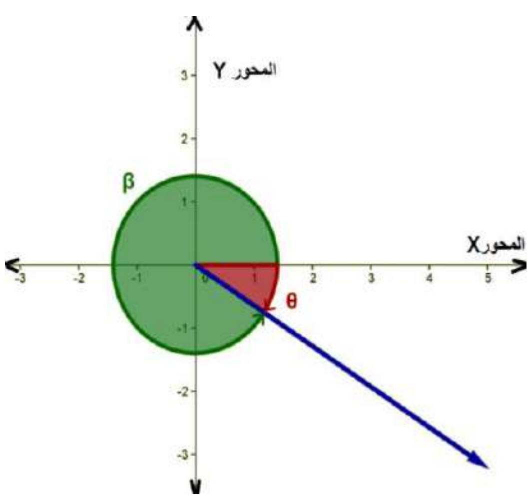
مثال 1:- في الشكل المجاور إذا كان قياس الزاوية(($\beta = 321°15'30''$)) تقرأ هذه الزاوية بيتا)) جد قياس الزاوية θ .

الحل : -

$$360° - \quad 321°15'30'' = 38°44'30''$$

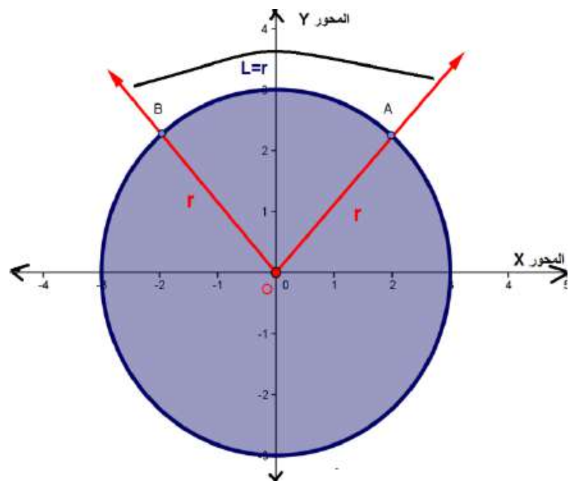
ونوضح في أدناه كيفية إيجاد ناتج عملية الطرح

$$\begin{array}{r} 359°59'60'' \\ 321°15'30'' \\ \hline 38°44'30'' \end{array}$$



ومن الجدير بالذكر ضرورة كتابة قياس الزاوية بالشكل $(-38°44'30'')$حيث تشير الاشارة السالبة الى كون الزاوية تدور باتجاه عقربي الساعة.

(2-2-3) القياس الدائري (أو النصف قطري)



وهو النظام الآخر لقياس الزوايا (التقدير الدائري) وتسمى وحدة القياس فيه الزاوية نصف قطرية حيث ان الزاوية المركزية التي يحصر ضلعيها قوساً طوله (l) يساوي طول نصف قطر تلك الدائرة (r) وكما موضح في الشكل أدناه :-

لاحظ أن قياس $\measuredangle AOB$ تساوي(1) زاوية نصف قطرية وبناء عليه فإن :-

- الزاوية المركزية التي يحصر ضلعيها قوس طوله (l) يساوي قطر تلك الدائرة اي $(2r)$ تكون قيمتها بالقياس الدائري (2) زاوية نصف قطرية
- الزاوية المركزية التي يحصر ضلعيها قوس طوله (l) يساوي 3 أمثال نصف قطر تلك الدائرة أي $(3r)$ تكون قيمتها بالقياس الدائري (3) زاوية نصف قطريه .... وهكذا

مما سبق نستنتج ان:-

$$\text{القياس الدائري للزاوية} = \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{طول نصف قطر الدائرة}}$$

أي إننا لو رمزنا للقياس الدائري للزاوية بالرمز d ولطول القوس بالرمز (l) يكون

$$|d| = \frac{l}{r}$$

ويرمز لوحدة القياس في القياس الدائري(أي للزاوية النصف قطرية الواحدة) بالرمز Rad .

[3-2-3]العلاقة بين القياسين الستيني والدائري

كما نعلم فإن محيط دائرة نصف قطرها (r) هو $2\pi r$ وهذا المحيط يقابل زاوية مركزية مقدارها بالقياس الستيني $(360°)$ ويصبح قياسها بالقياس الدائري:

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ rad \equiv 6.28 \ rad$$

اي ان(2π) من الزوايا النصف القطرية تعادل $360°$ بالقياس الستيني ومن ذلك نستنتج ان

$$1° \equiv \frac{2\pi}{360°} rad \equiv \frac{\pi}{180°} rad$$

وإن $$1 \ rad \equiv \frac{360°}{2\pi} \equiv 57°17'42''$$

ملاحظة :-

$$360^\circ \equiv 2\pi \ rad$$
$$180^\circ \equiv \ \pi \ rad$$
$$90^\circ \equiv \frac{\pi}{2} \ rad$$

فإذا كان (θ°) هو القياس الستيني ، d هو القياس الدائري (نصف القطري) فإنه بالإمكان استخدام التناسب الطردي في التحويل من أحد القياسين الى الآخر .

$$\frac{d}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

مثال 2:- زاوية مركزية تقابل قوساً طوله $(13.2cm)$ في دائرة نصف قطرها $6\ cm$

احسب قياسها:- $b)$ بالتقدير الستيني $a)$ بالتقدير الدائرى

الحل : $a)\ l = 13.2cm\ ,\quad r = 6cm$

$$|d| = \frac{l}{r} = \frac{13.2}{6} = 2.2\ rad$$

$$b)\ \frac{d}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{2.2}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{(2.2) \times (180)}{\pi} = 126^\circ$$

لاحظ اننا عوضنا $(\pi = 3.1416)$.

مثال 3:- حوّل قياسات كلاً من الزوايا الآتية الى التقدير الدائري

$a)\ 45^\circ \qquad b\ )\ 60^\circ \qquad c)\ 90^\circ$

الحل :-

$$a)\ \frac{d}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{d}{45^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow d = \frac{\pi}{4}\ Rad$$
$$b)\ \frac{d}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{d}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow d = \frac{\pi}{3}\ Rad$$
$$c)\ \frac{d}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{d}{90^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow d = \frac{\pi}{2}\ Rad$$

مثال 4:- زاوية مركزية قياسها $(40°)$ فما طول القوس الذي تقابله إذا كان طول نصف قطر الدائرة $(27cm)$ ؟

الحل :-

$$\frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$
$$\frac{d}{40} = \frac{\pi}{180°}$$
$$d = \frac{2\pi}{9}\ rad$$
$$|d| = \frac{l}{r}$$
$$\frac{2\pi}{9} = \frac{l}{27}$$
$$l = 6\pi = 6 \times (3.1416) = 18.8496\ cm$$

مثال 5:- زاوية مركزية طول قوسها $(15cm)$ وطول نصف قطر دائرتها $(35cm)$ فما قياسها الستيني؟

الحل:-

$$|d| = \frac{l}{r} \Rightarrow |d| = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}\ rad$$
$$\frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow \frac{\frac{3}{7}}{\theta°} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow \theta^{\circ} = \frac{\frac{3}{7} \times 180^{\circ}}{\pi} = 24.567^{\circ}$$

مثال 6:- حول $\frac{2\pi}{3}\ rad$ من الزوايا النصف قطرية الى القياس الستيني .

الحل :-

$$\frac{d}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$
$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{\theta°} = \frac{\pi}{180°}$$
$$\theta° = (180°) \times \frac{2}{3} = 120°$$

تمارين (1-3)

1. حول الى التقدير الدائري كلاً من الزوايا الآتية :-

$30°$, $-90°$, $120°$, $-315°$, $zero°$

2. حول كلا من الزوايا النصف قطرية الآتية الى التقدير الستيني :-

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, -4π , 2

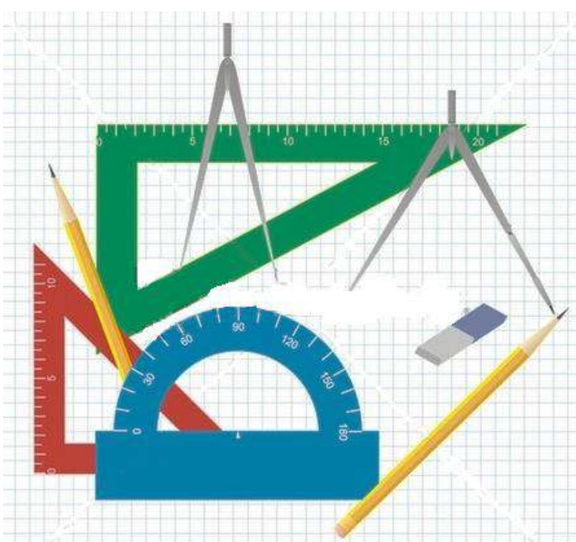
3. جد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ($45°$) في دائرة نصف قطرها $28cm$.

4. قياس زاوية مركزية يساوي $\frac{11}{6}$ من الزوايا النصف قطرية تقابل قوساً طوله $33cm$. جد نصف قطر تلك الدائرة .

5. في أي ربع من الأرباع للمحاور الاحداثية المتعامدة تقع الزوايا التي قياساتها كالآتي:-

a) $130°$
b) $\frac{5\pi}{6}$ Rad
c) $-45°$
d) $-\frac{\pi}{4}$ Rad
e) $750°$
f) $-390°$

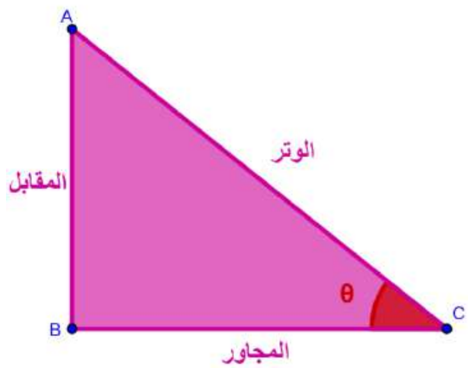
6. في المثلث ABC إذا كان قياس الزاوية A يساوي $43°42'40''$ وكان قياس الزاوية B يساوي $(50°20'30'')$ جد قياس الزاوية C.



(3-3) النسب المثلثية ومقلوباتها لزاوية حادة وبعض العلاقات الاساسية

في الشكل المجاور :-

المثلث ABC قائم الزاوية في B فيه الضلع $\overline{AB}$ يقابل الزاوية θ ولذلك أسميناه ((المقابل)) والضلع $\overline{BC}$ يقع بجوار الزاوية θ ولذلك أسميناه ((المجاور)) ومن المعروف انه في المثلث القائم الزاوية يسمى الضلع $\overline{AC}$ المقابل للزاوية القائمة ((الوتر)).



$1)\ \sin\theta = \frac{AB}{AC}$ (θ جيب الزاوية $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$)

$2)\ \cos\theta = \frac{BC}{AC}$ (θ جيب تمام الزاوية $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$)

$3)\ \tan\theta = \frac{AB}{BC}$ (θ ظل الزاوية $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$)

$4)\ \cot\theta = \frac{BC}{AB}$ (θ ظل تمام الزاوية $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$)

$5)\ \sec\theta = \frac{AC}{BC}$ (θ قاطع الزاوية $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$)

$6)\ \csc\theta = \frac{AC}{AB}$ (θ قاطع تمام الزاوية $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$)

ونستطيع استنتاج بعض العلاقات الاساسية من التعريف اعلاه وهي :-

1. $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

2. $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

3. $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

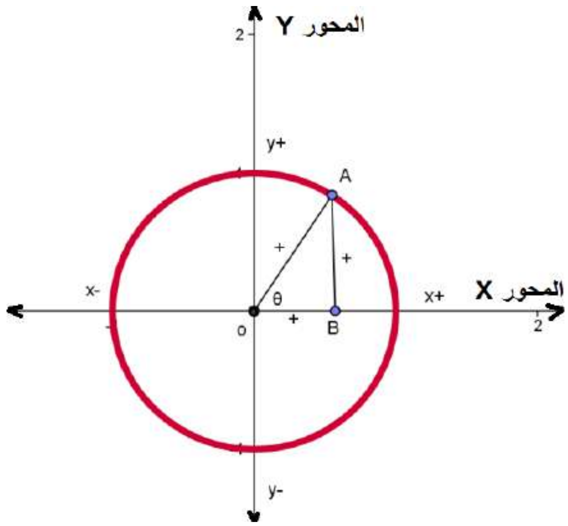
4. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

5. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

لاحظ ان :- $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$

(1-3-3) دائرة الوحدة:

هي دائرة مرسومه في المستوي الأحداثي مركزها نقطة الاصل O ونصف قطرها يساوي وحدة واحدة. إن دائرة الوحدة هذه تساعدنا في تعريف قيم النسب المثلثية آنفة الذكر لأية زاوية كانت (الزاوية θ حادة ، منفرجة ، سالبة ، موجبة) حيث يوضع رأس الزاوية في نقطة الاصل وأحد ضلعيها ينطبق على الاتجاه الموجب للمحور x أما الضلع الثاني للزاوية فسيقع في واحد من الأرباع الأربعة ويقطع محيط الدائرة في نقطة معينة ولتكن A ، العمود النازل من تلك النقطة A على المحور x يقطعه في نقطة ولتكن B ، العمود $\overline{AB}$ يحدد المقابل للزاوية أما المقطع $\overline{OB}$ للمحور x فيحدد المجاور للزاوية θ ، أما الوتر فيمثله نصف قطر الدائرة وطوله وحدة واحدة ويؤخذ موجباً دائماً . ويمكن توضيح ذلك بالرسم كالآتي: -



1) الزاوية θ في الربع الأول $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

لاحظ الشكل المجاور تجد ان المقابل للزاوية θ يكون موجباً لأنه يقابل الجزء الموجب للمحور y كما أن المجاور يكون موجباً أيضاً لأنه ينطبق على الجزء الموجب للمحور x وعليه تكون النسب المثلثية جميعها موجبة في الربع الأول . كما نلاحظ من هذا الشكل أن الزاوية OAB هي زاوية متممة للزاوية θ اي انها تساوي $\frac{\pi}{2} - \theta$ وإن المقابل لها هو المجاور للزاوية θ وهذا يقودنا الى إن :-

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

2) الزاوية θ في الربع الثاني $(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi)$

لاحظ الشكل ادناه تجد ان المقابل للزاوية θ يكون موجباً لأنه يقابل الجزء الموجب للمحور y أما المجاور للزاوية θ فيكون سالباً لأنه ينطبق على الجزء السالب للمحور x وعليه تكون جميع النسب المثلثية سالبة عدا $\sin\theta$ ومقلوبها $\csc\theta$ حيث يكونا موجبين. كما نلاحظ من هذا الشكل ان: -

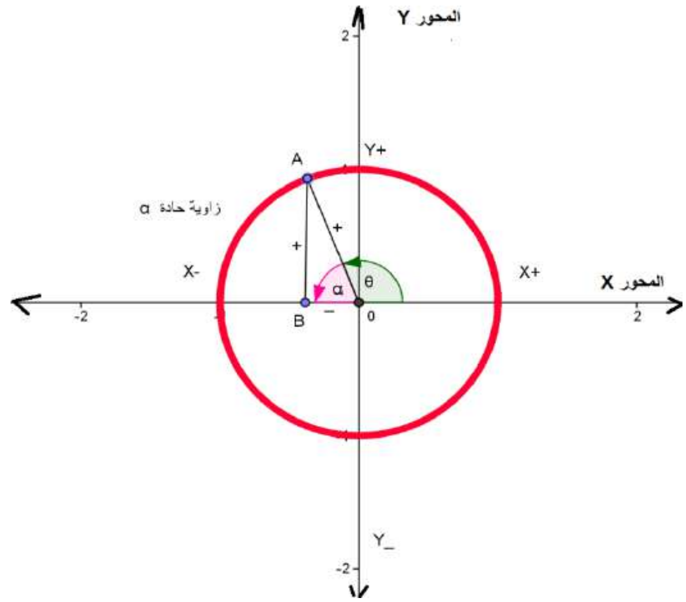
$$\sin\theta = \sin(\pi - \propto) = \sin\propto$$

$$\therefore \sin(\pi - \propto) = \sin\propto$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - \propto) = -\cos\propto$$

$$\therefore \cos(\pi - \propto) = -\cos\propto$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin(\pi - \propto) = \sin\propto \\ \cos(\pi - \propto) = -\cos\propto \\ \tan(\pi - \propto) = -\tan\propto \end{array}}$$



3) الزاويةθ في الربع الثالث $(\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2})$

لاحظ الشكل ألمجاور تجد ان المقابل للزاوية θ يكون سالباً لأنه يقابل الجزء السالب للمحور y كما إن المجاور للزاوية θ يكون سالباً أيضاً لأنه ينطبق على الجزء السالب للمحور x وعليه تكون جميع النسب المثلثية سالبه عدا $tan\,\theta$ ومقلوبها $\cot\theta$ حيث يكونا موجبين. كما نلاحظ من هذا الشكل أن:-

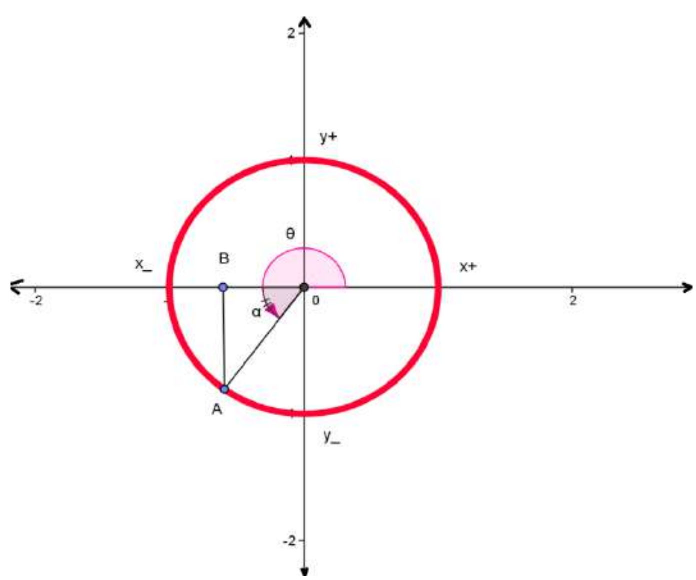
$$\sin\theta = \sin(\pi + \propto) = -\sin\propto$$

$$\therefore \sin(\pi + \propto) = -\sin\propto$$

$$\cos\theta = \cos(\pi + \propto) = -\cos\propto$$

$$\therefore \cos(\pi + \propto) = -\cos\propto$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin(\pi + \propto) = -\sin\propto \\ \cos(\pi + \propto) = -\cos\propto \\ \tan(\pi + \propto) = \tan\propto \end{array}}$$

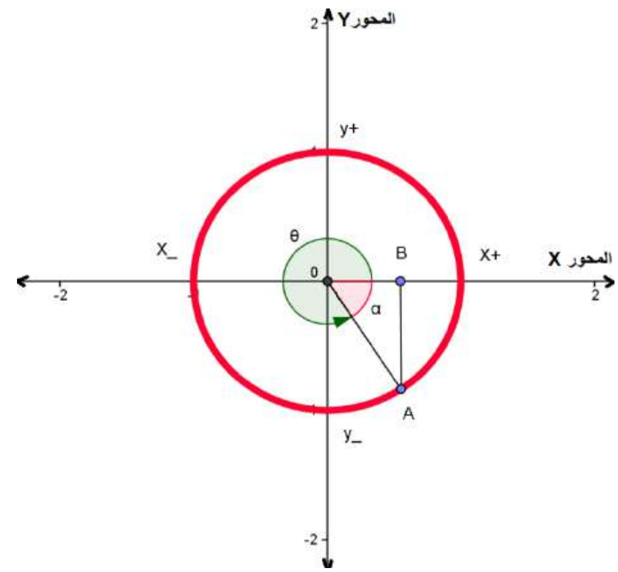


4) الزاوية θ في الربع الرابع $(\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi)$

لاحظ الشكل المجاور تجد ان المقابل للزاوية θ يكون سالباً لأنه يقابل الجزء السالب للمحور y بينما المجاور للزاوية θ يكون موجباً لأنه ينطبق على الجزء الموجب للمحور x وعليه تكون جميع النسب المثلثية سالبه عدا $cos\,\theta$ ومقلوبها $\sec\theta$ حيث يكونا موجبين. كما نلاحظ من هذا الشكل أن:-

$$\sin\theta = \sin(2\pi - \propto) = -\sin\propto$$
$$\therefore \sin(2\pi - \propto) = -\sin\propto$$
$$\cos\theta = \cos(2\pi - \propto) = \cos\propto$$
$$\therefore \cos(2\pi - \propto) = \cos\propto$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(2\pi - \propto) = -\sin\propto \\ \cos(2\pi - \propto) = \cos\propto \\ \tan(2\pi - \propto) = -\tan\propto\end{array}}$$



الربع الثاني		الربع الاول	
sin +	csc +	sin +	csc +
cos -	sec -	cos +	sec +
tan -	cot -	tan +	cot +
الربع الثالث		**الربع الرابع**	
sin -	csc -	sin -	csc -
cos -	sec -	cos +	sec +
tan +	cot +	tan -	cot -

ملاحظات :-

1) من خلال دائرة الوحدة يمكن أن نستنتج ما يلي:

- **إذا كانت θ تقع بالربع الأول تكون جميع اشارات النسب المثلثية موجبة.**
- **إذا كانت θ تقع بالربع الثاني تكون اشارة كل من $\sin\theta, \csc\theta$ فقط موجبة .**
- **إذا كانت θ تقع بالربع الثالث تكون اشارة كل من $\tan\theta, \cot\theta$ فقط موجبة .**
- **إذا كانت θ تقع بالربع الرابع تكون اشارة كل من $\cos\theta, \sec\theta$ فقط موجبة .**

(2

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos\theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cos\theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$
$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$	$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$	$\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$	$\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$	$\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$

3) بملاحظة تفاصيل دائرة الوحدة في الشكل أعلاه يمكننا التوصل بسهولة الى أن :-

الاحداثي y يمثل $\sin\theta$ والاحداثي x يمثل $\cos\theta$ وذلك يقودنا الى ان :-

$\sin 0° = 0$ $\qquad$ $\sin 90° = 1$

$\cos 0° = 1$ $\qquad$ $\cos 90° = 0$

$\tan 0° = 0$ $\qquad$ $\tan 90° = \frac{1}{0} = \infty$ غير معرف

$\sin 180° = 0$ $\qquad$ $\sin 270° = -1$

$\cos 180° = -1$ $\qquad$ $\cos 270° = 0$

$\tan 180° = 0$ $\qquad$ $\tan 270° = \frac{1}{0} = \infty$ غير معرف

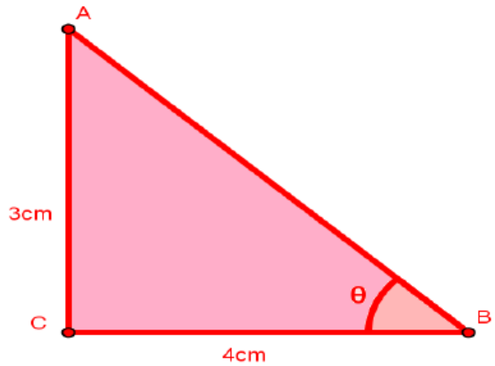
وتسهيلاً للحفظ ندرج في ادناه جدولاً بالنسب المثلثية للزوايا الخاصة بدائرة الوحدة.

θ	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	∞	0	∞	0

نلاحظ من الجدول أعلاه ان الزاويتين $360°$ و $0°$ زاويتان لهما قيم النسب المثلثية نفسها وذلك لكونهما زاويتين متطابقتين في دائرة الوحدة .

مثال 7:- في الشكل المجاور المثلث ABC قائم الزاوية في C فيه $AC = 3cm$, $BC = 4cm$ جد طول الضلع $\overline{AB}$ ثم استخرج: -

$\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta , \cot\theta , \csc\theta , \sec\theta$



الحل:-

مبرهنة فيثاغورس $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$

$$(AB)^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$$

$$AB = 5cm$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$$

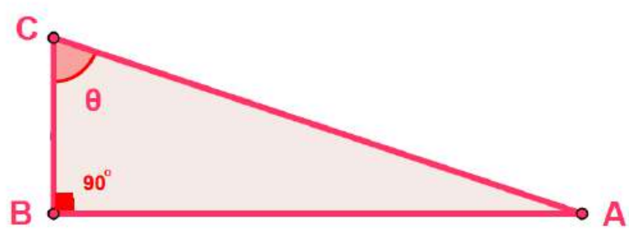
$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$$

مثال 8:- في الشكل المجاور المثلث ABC قائم الزاوية في B فإذا كان $\cos\theta = \frac{8}{17}$ فما قيمة $\sin\theta , \tan\theta$ ؟

الحل:-

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



$$\sin^2\theta = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$$

$$\sin\theta = \frac{15}{17}$$

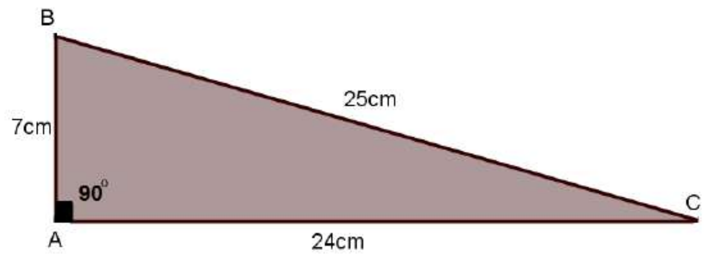
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

مثال 9:- المثلث ABC قائم الزاوية في A وفيه $AB = 7cm$, $AC = 24cm$.

جد $\cos B$, $\tan C$, $\sin C$, $\sin B$

الحل :- فيثاغورس $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2$$
$$= 49 + 576 = 625$$
$$BC = 25\ cm$$
$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{24}{25}$$
$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{25}$$
$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{24}$$
$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{25}$$

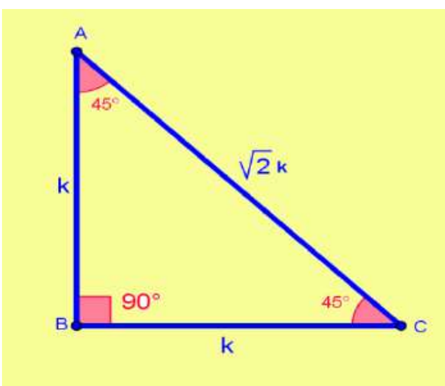


(4-3) النسب المثلثية للزوايا الخاصة

1) الزاوية التي قياسها $45° = \frac{\pi}{4}$

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B ومتساوي الساقين فيكون قياس كل من الزاويتين الباقيتين يساوي $45°$ $AB = BC = k$

وحسب مبرهنة فيثاغورس يكون :-



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(AC)^2 = (k)^2 + (k)^2 = 2k^2$$
$$AC = \sqrt{2}k$$

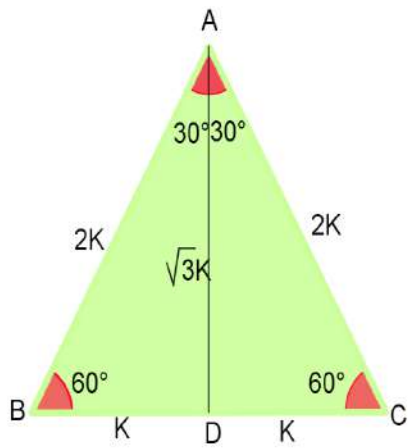
$$\sin 45° = \frac{k}{\sqrt{2}k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45° = \frac{k}{\sqrt{2}k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 45° = \frac{k}{k} = 1$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan 45° = 1}$$

2) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{6} = 30°$ و الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3} = 60°$

نرسم مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه $2k$ وبالطبع تكون قياسات زواياه متساوية وقياس كل منها يساوي $60°$ ثم نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ كما في الشكل المجاور ونلاحظ أن:-



$$\measuredangle CAD = \measuredangle BAD = 30°$$

$BD = DC = k$ وحدة طول

وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نتوصل الى أن: -

$$AD = \sqrt{3}k$$

وعليه فإن: -

$$\sin 30° = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{k}{\sqrt{3}k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

وتسهيلاً للحفظ ندرج في ادناه جدولاً بالنسب المثلثية للزوايا الخاصة كلها:-

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

مثال 10:- جد القيمة العددية لكل مما يأتي :-

a) $\cos 30° \sin 60° - \sin 30° \cos 60°$

b) $\cos^2 45° + \tan^2 45°$

c) $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \tan 30°}$

الحل:-

a) $\cos 30° \sin 60° - \sin 30° \cos 60°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) $\cos^2 45° + \tan^2 45°$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (1)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

c) $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \tan 30°}$

$$= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{1+1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال 11:- اثبت صحة المتطابقات المثلثية الآتية :-

a) $\frac{3}{4} \tan^2 30° + 2 \sin 60° + 3 \tan 45° + \cos^2 30° - \tan 60° = 4$

b) $4 \cos 30° \cos 45° \sin 30° \sin 60° \sin 45° = \frac{3}{4}$

الحل :-

$$a)\ L.H.S = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times 1 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \sqrt{3}$$

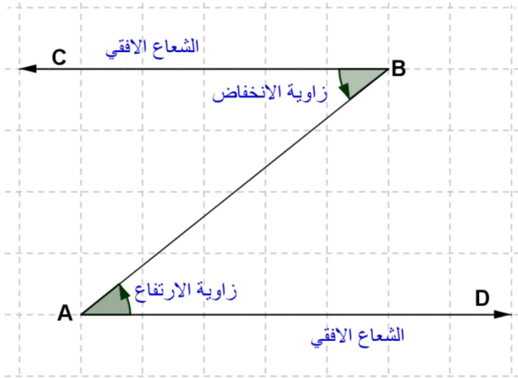
$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \sqrt{3} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 3$$

$$= 1 + 3 = 4 = R.H.S$$

$$b) L.H.S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} = R.H.S$$

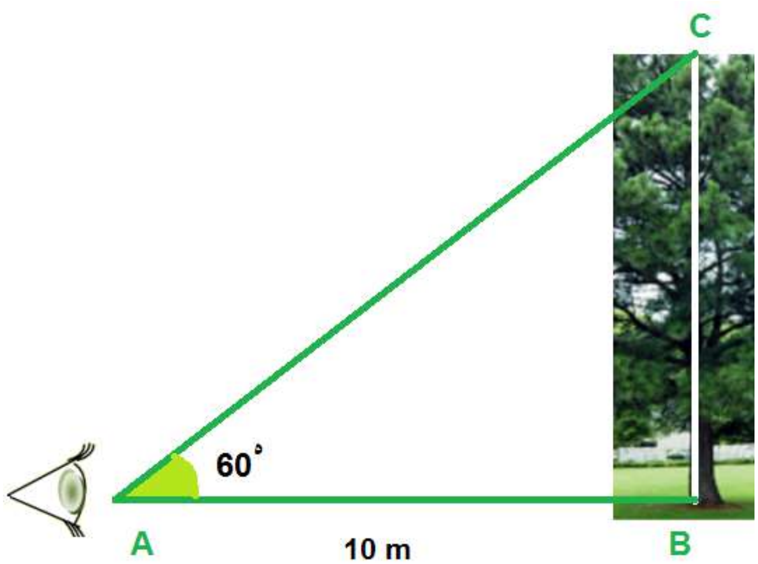
(3- 5) زاويتا الارتفاع والانخفاض



هي الزوايا الواقعة بين قطعة المستقيم الواصلة بين عين الراصد والجسم المرصود والشعاع الأفقي. فإذا كان الراصد واقفاً في النقطة A ونظر الى النقطة B التي هي أكثر ارتفاعا من A فتسمى $\measuredangle BAD$ بزاوية الارتفاع. وإذا كان الراصد واقفاً في النقطة B ونظر الى النقطة A التي هي أقل انخفاضا من B فتسمى $\measuredangle ABC$ بزاوية الانخفاض.

مثال12:- من نقطة على سطح الارض وجد شخص أن زاوية ارتفاع قمة شجرة هي $(60°)$. فإذا كانت المسافة بين الشخص وقاعدة الشجرة $(10\ m)$ فما هو ارتفاع الشجرة وما هي المسافة بين الرجل وقمة الشجرة؟

الحل: -



$$\tan 60° = \frac{CB}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{CB}{10}$$

$\therefore CB = 10\sqrt{3}\ m$ ارتفاع (الشجرة)

$$\cos 60° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

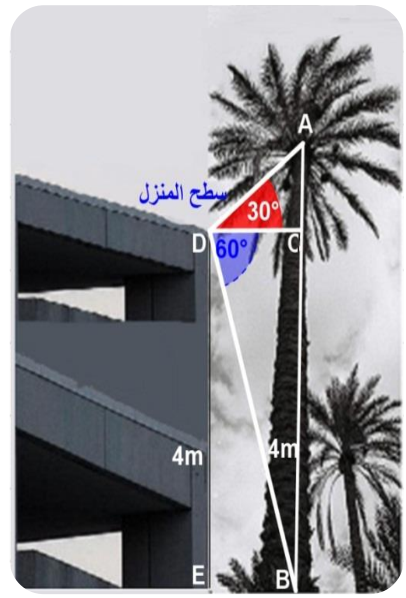
$$\frac{1}{2} = \frac{10}{\overline{AC}}$$

$AC = 20\ m$ (المسافة بين الرجل وقمة الشجرة)

مثال 13:- من سطح منزل ارتفاعه (4m) وجد مزارع أن زاوية ارتفاع أطول نخلة أمامه تساوي $(30°)$ وان زاوية انخفاض قاعدتها $(60°)$. جد بعد المزارع عن النخلة وارتفاع النخلة. علماً أن $\sqrt{3} = 1.7$

الحل:-

في المثلث BCD القائم الزاوية في C



$\tan 60° = \frac{CB}{DC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4}{DC}$

$DC = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{1.7} = 2.35\ m$ (بعد المزارع عن النخلة)

في المثلث ACD القائم الزاوية في C

$\tan 30° = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{2.35}$

$AC = \frac{2.35}{1.7} = 1.38\ m$ (ارتفاع النخلة عن سطح المنزل)

$\mathrm{AB} = 4 + 1.38 = 5.38\ m$ (ارتفاع النخلة عن سطح الارض)

مثال 14:- شاهد رجل أن زاوية ارتفاع منطاد مثبت بواسطة حبل على سطح الارض هي$45°$ وبعد ان تحرك باتجاه المنطاد مسافة (100m) وجد أن زاوية الارتفاع أصبحت $60°$. جد ارتفاع المنطاد. علماً أن $\sqrt{3} = 1.7$

الحل: -

نفرض أن ارتفاع المنطاد $AB = x$ وان $BC = y$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

$$\tan 60° = \frac{x}{y}$$

$\sqrt{3} = \frac{x}{y}$

$x = \sqrt{3}\, y \ldots\ldots (1)$

في المثلث ABD القائم الزاوية في B

$$\tan 45 = \frac{x}{100+y}$$

$$1 = \frac{x}{100+y}$$

$$x = 100 + y \;\; \ldots\ldots (2)$$

بتعويض (1) في (2) نحصل على: -

$$\sqrt{3}y = 100 + y$$

$$1.7y = 100 + y$$

$$1.7y - y = 100$$

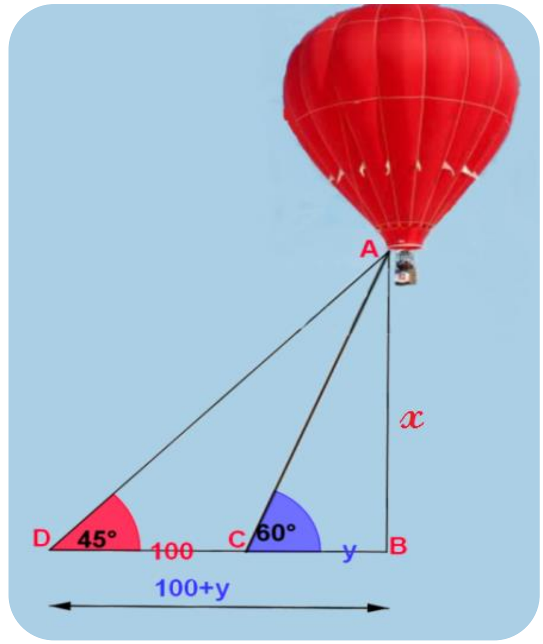
$$0.7y = 100$$

$$y = \frac{100}{0.7} = 142.857m$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$x = \sqrt{3} \times 142.857$$

$$x = 1.7 \times 142.857 = 242.857m$$ ارتفاع المنطاد



ا

تمارين (3-2)

1. جد القيمة العددية لكل مما يأتي: -

a) $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30°$

b) $(\cos 30° - \sin 45°)(\sin 60° + \cos 45°)$

c) $(\tan 30° - \tan 60°)(2 \tan 60° \tan 45°)$

d) $\frac{4 \sin^2 30° - \tan^2 45°}{2 \tan 30° + 3 \sin 30°}$

e) $3 \sin^2 90° - 4 \cos^2 0° + \tan^2 45°$

2. برهن صحة المتطابقات المثلثية الآتية: -

a) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

b) $2 \sin^3 45° - \sin 45° + \tan 45° = 2 \sin 30°$

c) $\frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{\tan 45° + \tan 60°}$

3. المثلث ABC قائم الزاوية في C فيه $\overline{BC} = 24cm$, $AB = 25cm$ جد قيمة المقدار $\sin^2 B + \cos^2 B$

4. إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{5}$ وكانت $0° \leq \theta \leq 90°$. جد قيمة كلاً من $\cos \theta , \tan \theta$.

5. اعتماداً على المعلومات المعطاة عن الزاوية θ في كل مما يلي . جد قيم النسب المثلثية الستة $\sin \theta , \cos \theta , \tan \theta , \sec \theta , \csc \theta , \cot \theta$

a) $\sin \theta = \frac{1}{6}$, $90° \leq \theta \leq 180°$

b) $\cos \theta = \frac{-1}{3}$, $180° \leq \theta \leq 270°$

c) $\tan \theta = \frac{-3}{4}$, $270° \leq \theta \leq 360°$

6. طائرة ورقية طول خيطها $(60m)$ والزاوية التي يصنعها الخيط مع الارض تساوي $30°$ فما هو ارتفاع الطائرة علماً أن $\sqrt{3} = 1.7$ ؟

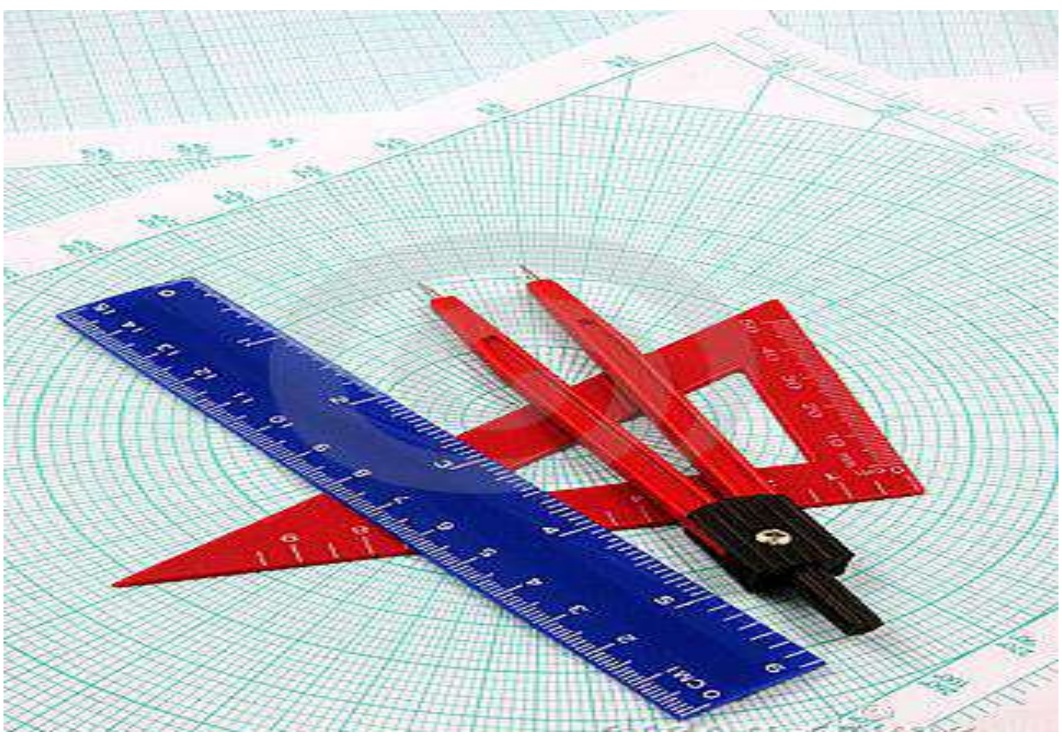
7. عمود طوله $(6m)$ مثبت شاقولياً على أرض مستوية أفقياً ، وجد رجل أن زاوية أرتفاع قمته هي $(30°)$ جد بعد الرجل عن قاعدة العمود .

تواريخ مهمة في الرياضيات (نشاط إثرائي)

الحدث	التاريخ
أطلق العرب على علم الجبر هذا الاسم لأول مرة وظل معروفا به حتى الآن	215هـ –830 م
استخدم الخوارزمي، ولأول مرة مصطلح الأصم للإشارة للعدد الذي لا جذر له	220 هـ – 835 م
كان ثابت بن قرة أول من اشتغل برياضيات التسلية عند العرب	270 هـ – 883 م
مهد ثابت بن قرة لإيجاد حساب التكامل والتفاضل	285هـ – 898 م
استعمل البتاني الجيب بدلا من وتر ضعف القوس في قياس الزوايا لأول مرة	300 هـ – 912 م
استنبط الرياضيون العرب الظل في قياس الزاوية المفروضة بالضلع المقابل لها مقسوما على الضلع المجاور	370 هـ – 980 م
لفت نصير الدين الطوسي الأنظار لأول مرة لأخطاء إقليدس في المتوازيات	650 هـ – 1252 م
اخترع غياث الدين الكاشي الكسور العشرية	800 هـ – 1397 م
وضع القلصادي أبو الحسن القرشي الرموز لعلم الجبر بدلا من الكلمات لأول مرة في تاريخ هذا العلم	870 هـ – 1465 م
استخدم قدماء المصريين النظام العشري . وطوروا كذلك الهندسة وتقنيات الرياضيات	3000 ق.م
العربية الى أوروبا نتيجة لترجمة كتاب الخوارزمي في الحساب-أدخل نظام الأعداد الهندية	منتصف القرن الثاني عشر الميلادي
استخدم عالم الرياضيات الهولندي فاندر هوكي اشارتي الجمع (+) والطرح (−) لأول مرة في الصيغ الجبرية	1514 م
أسس عالم الرياضيات الألماني ريجيو مونتانوس ، حساب المثلثات كفرع مستقل عن الفلك	1533 م
أدخل روبورت ركورد إشارة المساواة (=) في الرياضيات معتقدا انه لا يوجد شيء يمكن أن يكون أكثر مساواة من زوج من الخيوط المتوازية	1557 م
نشر جون نايير دراسته في اللوغاريتمات التي تساعد في تبسيط الحسابات	1614 م
نشر رينيه ديكارت اكتشافه في الهندسة التحليلية ، مقررا أن الرياضيات هي النموذج الأمثل في التعليل	1637 م
نشر كل من السير اسحق نيوتن وجو تفريد ولهلم ليبنتز بصورة مستقلة اكتشافاتهما في حساب التكامل والتفاضل	منتصف العقد التاسع للقرن السابع عشر الميلادي
قام أبراهام شارب بحساب قيمة النسبة التقريبية حتى **72** منزلة عشرية	1717 م

الفصل الرابع

الهندسه الاحداثية



الاهداف السلوكية:

يجب على الطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على أن: -

1. **يتعامل مع المحورين الإحداثيين ويتمكن من تحديد النقاط عليه ويرسم القطع المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين منها. .**
2. **يستخرج المسافة (البُعد) بين نقطتين.**
3. **يستخرج إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة.**
4. **يتعرف على مفهوم ميل المستقيم وكيفية إيجاده.**
5. **يستخرج ميل الخط المستقيم ومقطعه للمحور y من معادلته.**
6. **يستخرج بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم.**

الفصل الرابع

الهندسة الإحداثية

المقدمة

(1-4) المستوي الإحداثي ($x\ y$ -plane) .

(2-4) إيجاد المسافة (البُعد) بين نقطتين على المستوي الإحداثي .

(3-4) ايجاد احداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة (إحداثيات نقطة التنصيف).

(4-4) ميل المستقيم.

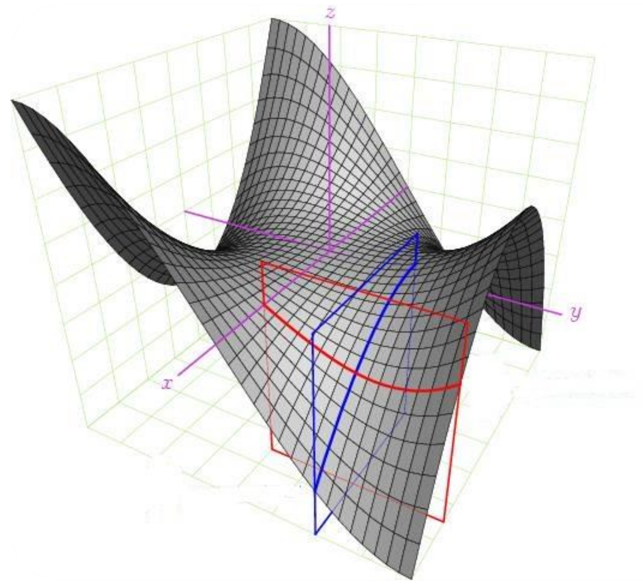
(5-4) المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة .

(6-4) معادلة الخط المستقيم .

(7-4) إيجاد ميل المستقيم ومقطعه للمحور y من معادلته .

(8-4) طرائق إيجاد معادلة المستقيم

(9-4) إيجاد بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .



الفصل الرابع

الهندسة الإحداثية *Analytic Geometry*

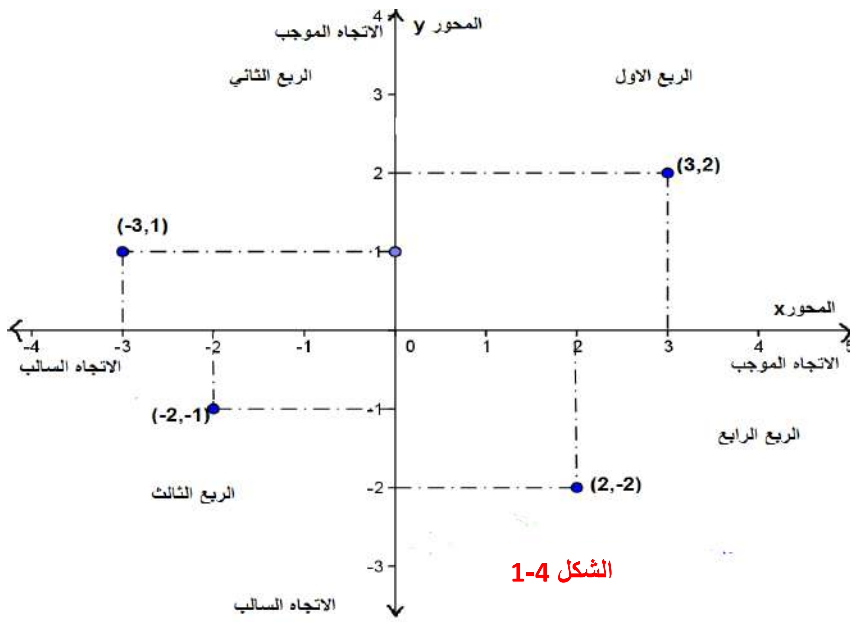
المقدمة

من المعروف ان علم الرياضيات قد تطور تطوراً جذرياً منذ أن اكتشف العالم الرياضي والفيلسوف الفرنسي رينيه ديكارت ($1596 - 1650$م) نظم الإحداثيات وتطبيقاتها في الهندسة. الأمر الذي آل إلى أمكانية تناول المسائل الهندسية بطرق جبرية. وبدا أن الجبر والهندسة يتجهان إلى التكامل معاً... الأمر الذي أدى لظهور حساب التفاضل والتكامل فيما بعد على يد كل من أسحق نيوتن ($1642 - 1727$م) وليبنز($1646 - 1716$م) . ولا بد من الأشارة إلى دور العرب في هذا المجال حيث ان العالم العربي (ثابت بن قرة) وضع قرابة 850 كتابا في العلاقة بين الهندسة والجبر فخطا بذلك خطوة كبيرة بأتجاه الهندسة الإحداثية .

إن ما يعرف الآن بالهندسة الإحداثية هو علم استخدام العلاقات الجبرية في دراسة المجموعات النقطية مثل تمثيل المستقيم والدائرة والقطوع المخروطية بمعادلات جبرية مما يجعل الهندسة الإحداثية أداة رياضية تفوق الهندسة الإقليدية فهي أشد اختصاراً وأدق تعبيراً فضلاً عن كونها قابلة للتمدد والاتساع.

(1-4) المستوي الأحداثي (*xy*) $(xy - plane)$

في الفصل هذا سنقدم بإيجاز مبادئ الهندسة التحليلية ومعادلة المستقيم وحالاته من تواز وتعامد. يذّكر الطالب ان المستوي الأحداثي يتكون من مستقيمين متعامدين في نقطة نسميها نقطة الاصل (*Origin*) يرمز لها بالرمز O ويسمى هذان المستقيمان بالمحورين الإحداثيين وهما يقسمان المستوي الأحداثي *xy* (*xy- plane*)إلى أربعة أجزاء تسمى الأرباع الأربعة *(quadrants)* يسمى المستقيم الافقي بالمحور x **ويسمى المستقيم العمودي** بالمحور y **ويقسم كل منهما إلى اجزاء متساوية بالطول ، قياس كل جزء منها هو وحدة الطول. يعتبر يمين نقطة الاصل على المحور x الاتجاه الموجب لهذا المحور فيما يمثل يسار نقطة الأصل الاتجاه السالب للمحور هذا. أما بالنسبة للمحور y فإن الاتجاه العلوي يمثل الاتجاه الموجب لهذا المحور فيما يمثل الاتجاه السفلي الاتجاه السالب للمحور هذا. والشكل (1-4) في الصفحة الاتية يوضح ما تم وصفه.**



الشكل 4-1

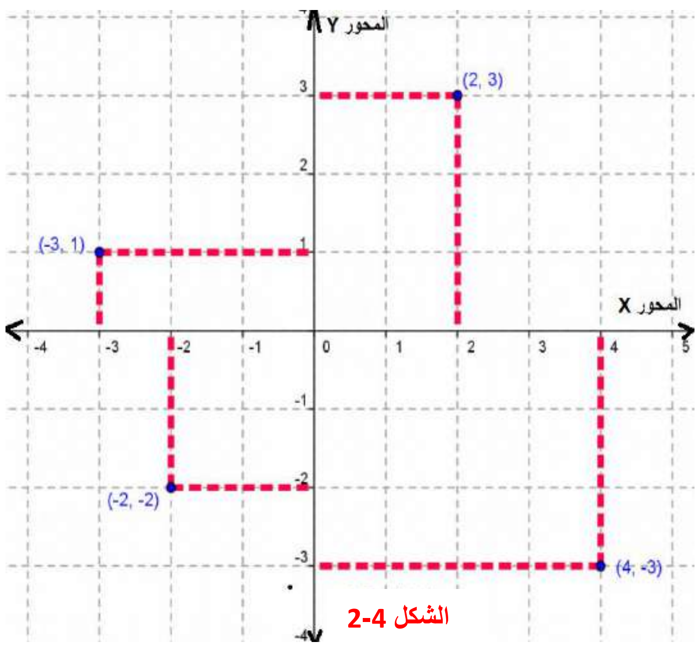
نعبر عن نقاط المستوي xy **(** x y-*plane* **) بالزوج المرتب** (x, y)**حيث يمثل الأحداثي** x **القيمة العددية للبعد الافقي للنقطة** $P(x, y)$ **عن المحور** y **وكذلك يمثل الأحداثي** y**القيمة العددية للبعد العمودي للنقطة عن المحور** x **، وبهذا فإن كل نقطة في المستوي يعبر عنها بزوج من الاعداد الحقيقية (زوج من القيم) تسمى (الإحداثيات)(*Coordinates*) وللسبب هذا تكون إحداثيات نقطة الأصل** $(0،0)$.

مثال 1:- عيّن مواقع النقاط الآتية على المحاور الإحداثية المتعامدة مستخدماً ورق المربعات

$$(2, 3), (-3, 1), (-2, -2), (4, -3)$$

الحل:-

لاحظ مواقع النقاط في المستوي الاحداثي في الشكل (4-2) المجاور



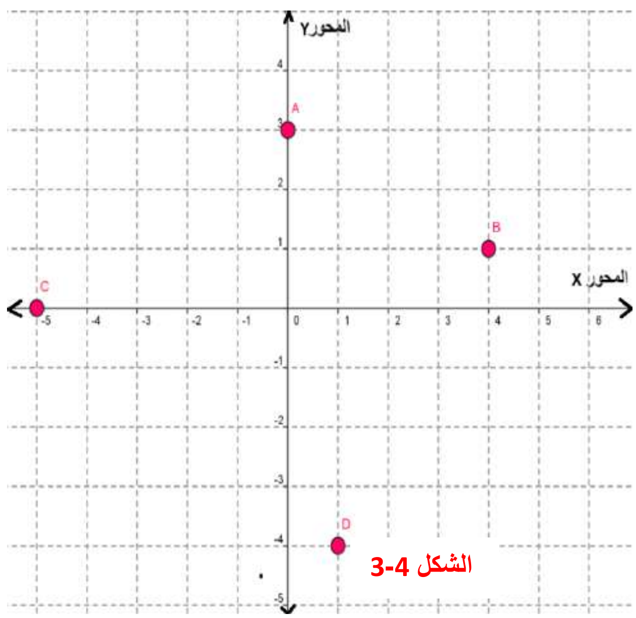
الشكل 4-2

تمارين (4-1)

1. عيّن مواقع النقاط الآتية على النظام الإحداثي المتعامد في المستوي xy :-

$$\left(0,\frac{3}{2}\right),(4,0),(0,2),(-2,3),(3,4),(-3,-4),(2,-3)$$

2. حدّد الأزواج المرتبة التي تمثل النقاط A,B,C,D في الشكل (3-4) المجاور:



الشكل 3-4

(2-4) إيجاد المسافة (البُعد) بين *نقطتين* على المستوي الاحداثي

(Distance Between Two Points)

إذا كانت $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ، نقطتين في المستوي فإن المسافة بينهما ويرمز لها بالرمز d تمثل طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ والتي يمكن حسابها باستخدام العلاقة الآتية :-

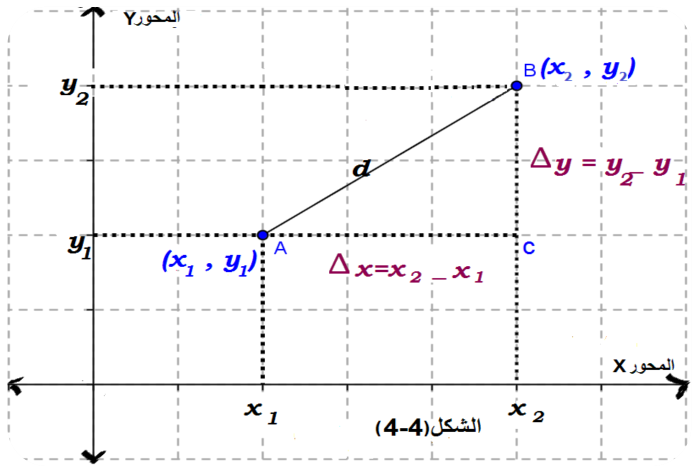
$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

الشكل (4-4) الاتي يوضح لنا السند العلمي للعلاقة هذه حيث أن القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تمثل الوتر في المثلث ABC القائم الزاوية في C وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نتوصل إلى أن: -

$$d^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

وبجذر الطرفين نحصل على $d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ حيث أن :

$$\Delta x=(x_2-x_1),\Delta y=(y_2-y_1)$$

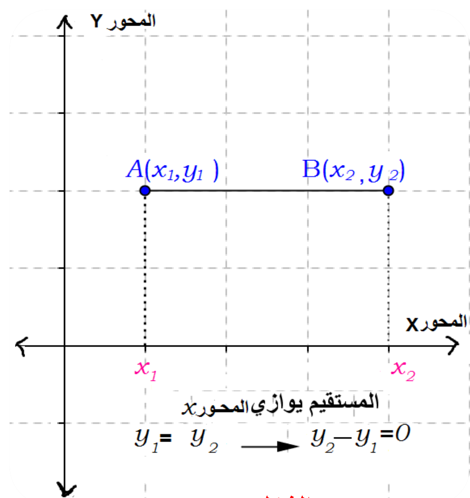


الشكل(4-4)

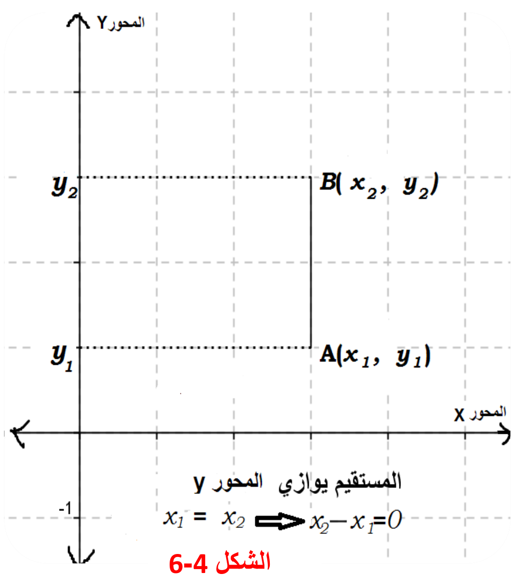
ونستطيع أن نستنتج أيضاً أنه إذا كانت $x_2 - x_1 = 0$ فإن $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |(y_2 - y_1)|$

وكذلك إذا كانت $y_2 - y_1 = 0$ فإن $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |(x_2 - x_1)|$

((أنظر الشكلين (4-5) و (4-6) في أدناه)).



الشكل 4-5



الشكل 4-6

مثال 2:- جد المسافة بين النقطتين $A(1, 4)$ ، $B(5, 2)$

الحل :-

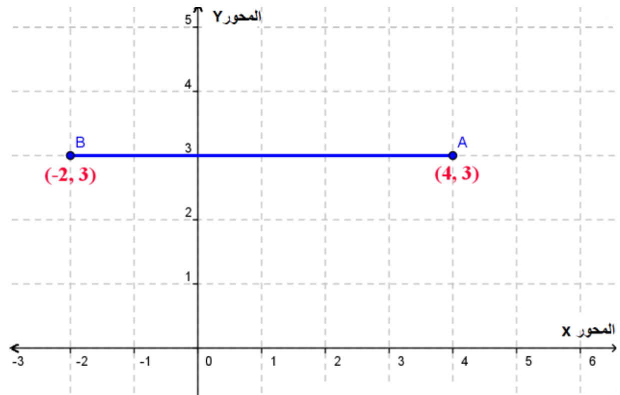
$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$ وحدة طول

مثال 3:- إذا كانت $B\ (-2,3)$ ، $A(4,3)$ احسب المسافة بينهما مع الرسم .

الحل :-

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-4)^2 + (3-3)^2}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$ وحدة طول

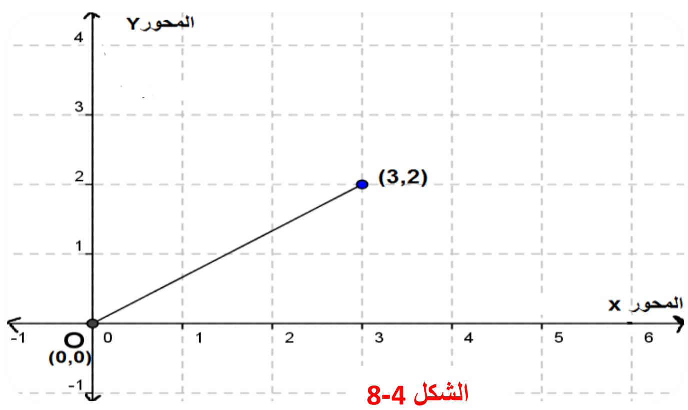


الشكل 4-7

مثال 4:- جد المسافة بين النقطة $A(3,2)$ ونقطة الاصل .

الحل :-

$$d_{AO} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(0-3)^2 + (0-2)^2}$$
$$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$ وحدة طول



الشكل 4-8

(3-4) إيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة *(Coordinates of Mid-Point)*

لتكن $C\ (x, y)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتيها النقطتين $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$. ان احداثيا نقطة المنتصف C يمكن حسابهما باستخدام العلاقة الآتية: -

$$\boxed{C(x, y) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

مثال 5:- جد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتيها $B(6,2)$ ، $A(2,4)$

الحل :- نفرض ان نقطة المنتصف هي $C(x,y)$ وعليه تكون إحداثياتها هي :-

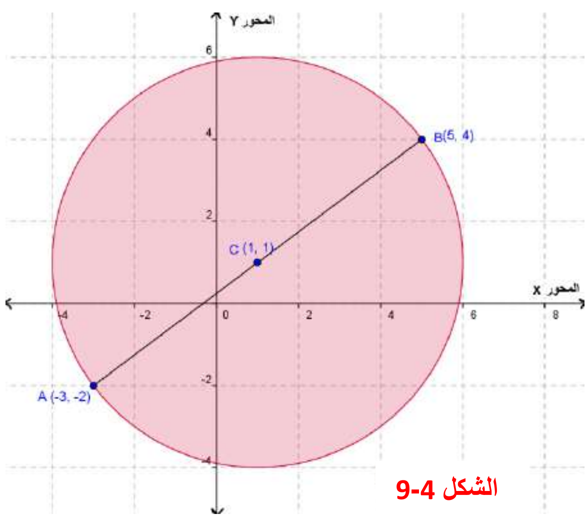
$$C(x,y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= C\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = C(4,3)$$

مثال 6:- نقطتا نهايتي قطر دائرة هما $A(-3,-2), B(5,4)$ جد إحداثيات مركز الدائرة مع الرسم.

الحل :- المركز ينصف قطر الدائرة

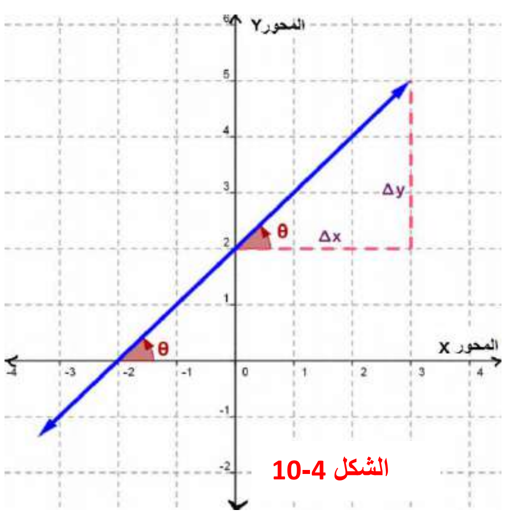
$$C(x,y) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = C\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = C(1,1)$$



الشكل 9-4

(4-4) ميل المستقيم (*The Slope of the Line*)

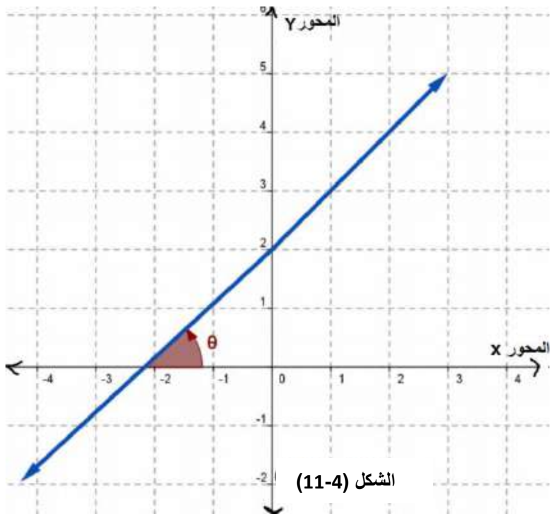
يعرف ميل المستقيم بأنه ظل (tan) الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور x . يرمز لميل المستقيم بالرمز m فإذا كانت الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور y هي θ فأن $\boxed{m = \tan\theta}$ كما في الشكل (10-4) ألمجاور :-



الشكل 10-4

أي إن $\boxed{m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

كما في الشكل (4-11) الآتي:-



الشكل (4-11)

كما يمكننا ملاحظة إن :-

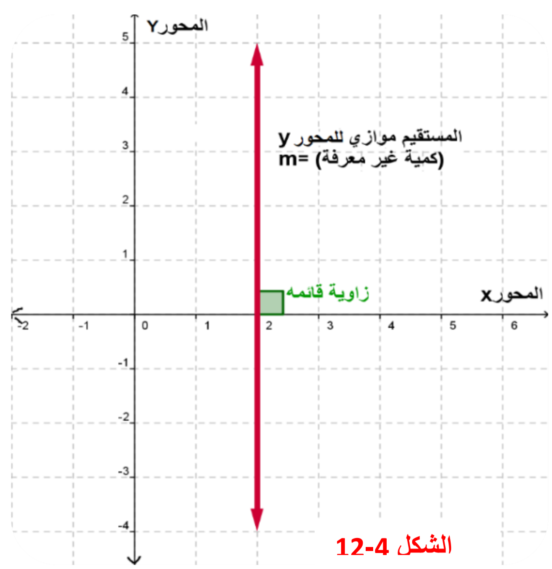
إذا كانت الزاوية θ حادة فإن $0 < m$ أي ان قيمة الميل = عدد موجب .

إذا كانت الزاوية θ منفرجة فإن $0 > m$ أي ان قيمة الميل = عدد سالب .

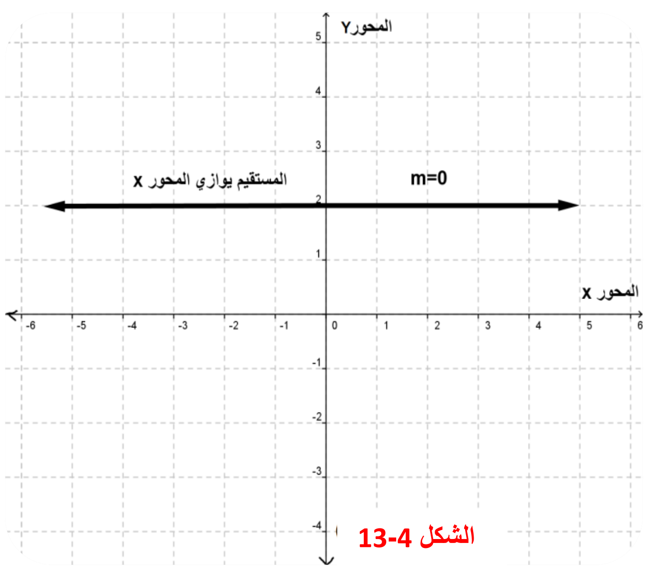
إذا كان $m = 0$ فإن المستقيم يوازي المحور x .

إذا كان m يساوي كمية غير معرّفة اي $\left(\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}\right)$ فإن المستقيم يوازي المحور y .

ويمكننا ملاحظة ما ورد أعلاه من الاشكال التوضيحية الآتية: -



الشكل 4-12



الشكل 4-13

مثال 7:- جد ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب المحور x زاوية مقدارها $60°$

الحل:-

$$m = tan60° = \sqrt{3}$$

لننظر الآن مرة ثانية إلى الشكل (4-11) والعلاقة التي استنتجناها منه وهي

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

إن الرمز Δy يشير إلى مقدار التغير في قيمة الأحداثي y أي إنه يساوي $y_2 - y_1$ كما إن الرمز Δx يشير إلى مقدار التغير في قيمة الأحداثي x أي إنه يساوي $x_2 - x_1$ وعليه فأننا نستطيع أعادة صياغة العلاقة أعلاه لتصبح: -

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad , x_2 \neq x_1$$

مثال 8:- $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور x زاوية مقدارها $45°$ فإذا كانت $A(9, k)$, $B(6, 2k)$ فما قيمة k ؟

الحل :-

$$m = tan45° = 1$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$1 = \frac{2k - k}{6 - 9} \Rightarrow 1 = \frac{k}{-3} \Rightarrow k = -3$$

ملاحظة: الرمز $m_{\overline{AB}}$ يقصد به ميل المستقيم المار بالنقطتين A, B

مثال 9:- جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المبينة إحداثياتهما في كل مما يأتي مع الرسم

a) $A(-2, 0)$, $B(3, 1)$

b) $C(-1, 2), D(2, 2)$

c) $E(0, 4)$, $F(1, -1)$

d) $G(3, 4)$, $B(3, 1)$

الحل :-

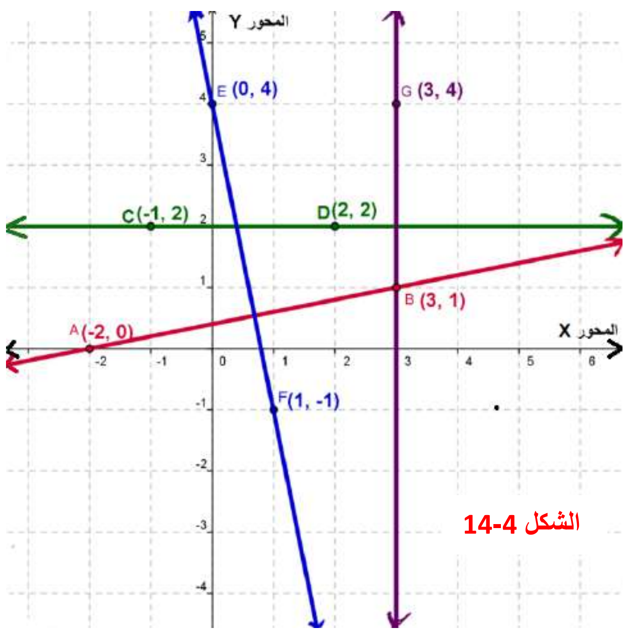
$$a)\ m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-(-2)} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$b)\ m_{\overline{CD}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{2-(-1)} = \frac{0}{2+1} = 0$$

$$c)\ m_{\overline{EF}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-4}{1-0} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$d)\ m_{\overline{GB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-4}{3-3} = \frac{-3}{0} = (\text{كمية غير معرفة})$$

والشكل(4-14) المجاور يمثل المخطط البياني للمستقيمات الاربعة



الشكل 4-14

(4-5) المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة (*Parallel and Perpendicular Lines*)

أولا. المستقيمات المتوازية (*Parallel Lines*)

إذا كان لدينا مستقيمان متوازيان $\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2}$ ولكل منهما ميل معلوم m_1 ، m_2 على التوالي فإن

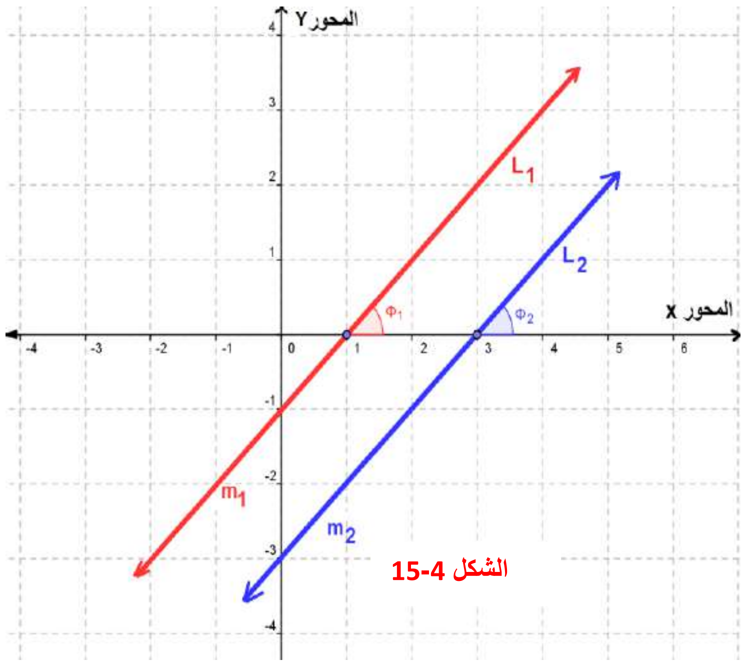
$$m_1 = m_2$$

البرهان: -

$$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 \quad (\text{بالتناظر})$$

$$\Rightarrow \tan\Phi_1 = \tan\Phi_2$$

$$\Rightarrow m_2 = m_1$$



الشكل 4-15

ثانيا. المستقيمات المتعامدة (*Perpendicular Lines*)

إذا كان لدينا مستقيمان متعامدان $\overleftrightarrow{L_2}, \overleftrightarrow{L_1}$ ولكل منهما ميل معلوم m_2 ، m_1 على التوالي فإن

$$\boldsymbol{m_1 \times m_2 = -1} \quad \text{أي} \quad \boldsymbol{m_1 = \frac{-1}{m_2}}$$

البرهان: -

$$\because \overleftrightarrow{L1} \perp \overleftrightarrow{L2} \quad \Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \phi_1$$

(قياس الزاوية الخارجية في المثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها)

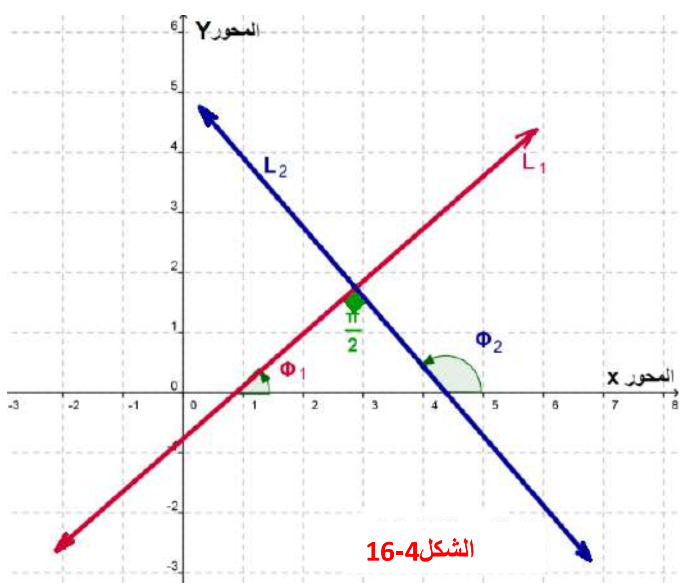
$$\tan \Phi_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \Phi_1\right)$$

$$\tan \Phi_2 = -\cot \phi_1$$

$$\tan \Phi_2 = -\frac{1}{\tan \phi_1}$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

$$m_1 \times m_2 = -1$$



الشكل4-16

مثال 10:- إذا كانت $A(6,2), B(8,6), C(4,8), D(2,4)$ اثبت ما يلي :-

(1) المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيان **(2)** المستقيمان $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{DC}$ متعامدان

الحل :- (1)

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{8-6} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

$$\because m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

أي ان المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{DC}$ متوازيان

(2)

$$m_{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

$$m_{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-6} = \frac{-1}{2}$$

$$\because m_{DC} \times m_{AD} = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$$

أي أن المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{DC}$ متعامدان

مثال 11:- اثبت إن النقاط $A(4,2), B(1,-1), C(-1,-3)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل :-

$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore m_{AB} = \frac{-1-2}{1-4} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$m_{BC} = \frac{-3-(-1)}{-1-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

بما أن القطعتين المستقيمتين $\overline{BC}, \overline{AB}$ لهما الميل نفسه وتشتركان بالنقطة B فإن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة

مثال 12: إذا كانت النقاط $A(3k, 4k), B(5k, 20), C(7k, 28)$ تقع على استقامة واحدة فما قيمة k ؟

الحل :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore m_{AB} = \frac{20 - 4k}{5K - 3k} = \frac{20 - 4k}{2k}$$

$$m_{BC} = \frac{28 - 20}{7k - 5k} = \frac{8}{2k} = \frac{4}{k}$$

وبما ان النقاط تقع على استقامة واحدة فان $m_{AB} = m_{BC}$ أي إن :-

$$\frac{20 - 4k}{2k} = \frac{4}{k}$$

$$20k - 4k^2 = 8k$$

$$4k^2 - 12k = 0 \quad (\div 4)$$

$$k^2 - 3k = 0$$

$$k(k - 3) = 0$$

اما $k = 0$

او $k = 3$

مثال13:- اثبت إن المستقيم المار بالنقطتين $(3, 1)$, $(8, 5)$ والمستقيم المار بالنقطتين$(2, 12)$, $(6, 7)$ متعامدان.

الحل :-

$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{1 - 5}{3 - 8} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

$$m_2 = \frac{12 - 7}{2 - 6} = \frac{5}{-4}$$

$$\because m_1 \times m_2 = \frac{4}{5} \times \frac{5}{-4} = -1$$

اذن المستقيمان متعامدان

مثال 14:- إذا علمت أن $A(k,4), B(6,8), C(10,7), D(9,2k)$ رؤوس شكل رباعي فيه

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$. جد قيمة k .

الحل : -

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AC} = \frac{7-4}{10-K} = \frac{3}{10-K}$$

$$m_{BD} = \frac{2k-8}{9-6} = \frac{2k-8}{3}$$

$$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow m_{AC} \times m_{BD} = -1$$

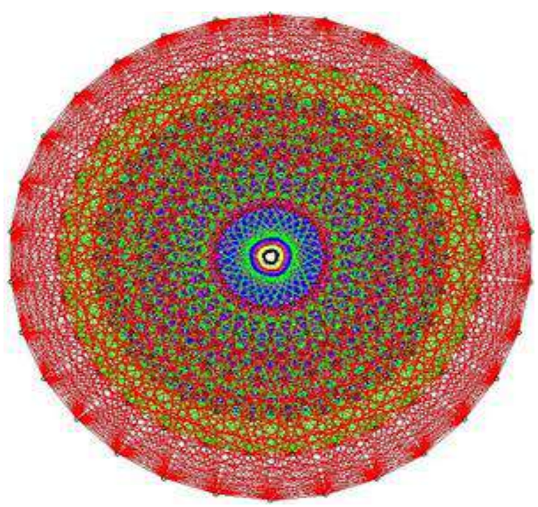
$$\frac{3}{10-k} \times \frac{2k-8}{3} = -1$$

$$\frac{2k-8}{10-k} = -1$$

$$2k - 8 = -10 + k$$

$$2k - k = -10 + 8$$

$$k = -2$$



تمارين (2-4)

1. اثبت إن النقاط $\mathbf{A(1,1), B(13,6), C(10,10), D(-2,5)}$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع . ثم جد طول قطريه.
2. اثبت إن النقاط $\mathbf{A(-1,-5), B(5,1), C(2,4), D(-4,-2)}$ تمثل رؤوس مستطيل ثم جد محيطه.
3. اثبت إن النقاط $\mathbf{A(0,-1), B(2,1), C(0,3), D(-2,1)}$ تمثل رؤوس مربع وجد مساحته.
4. اثبت إن الشكل الرباعي الذي رؤوسه $\mathbf{A(0,0), B(6,2), C(4,-4), D(-2,-6)}$ هو معين وجد مساحته ومحيطه.
5. اثبت إن الشكل الرباعي الذي رؤوسه $\mathbf{A(-2,2), B(2,-2), C(4,2), D(2,4)}$ هو شبه منحرف متعامد القطرين .
6. جد قيمة $\boldsymbol{k}$ التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين $(\boldsymbol{k},-1),(3,5)$ عموداً على المستقيم المار بالنقطتين $(2,-3),(-1,-2)$.
7. جد طول المستقيم المتوسط $\overline{AD}$ للمثلث ABC حيث $A(4,12), B(4,2), C\,(14,12)$ ثم برهن إن $\overleftrightarrow{\mathbf{AD}} \perp \overleftrightarrow{\mathbf{BC}}$.
8. إذا كان $A(3,5),\ B\,(1,-3)$ طرفي قطعة مستقيمة وكان العمود المقام عليها من منتصفها يمر بالنقطة $C(k\,,k\,)$ جد قيمة $\boldsymbol{k}$.
9. اثبت أن الشكل الرباعي الذي رؤوسه منتصف أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يكون متوازي أضلاع حيث $\mathbf{A(2,6), B(-4,2), C(-4,-4), D(4,-2)}$.
10. إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(2,1),(-8,\boldsymbol{k})$ يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(7,2\boldsymbol{k}+1),(11,-1)$ فما قيمة $\boldsymbol{k}$ ؟

(6-4) معادلة الخط المستقيم *(Straight Line Equation)*

سوف نتعرف في البند هذا على معادلة الخط المستقيم (المعادلة الخطية) والتي هي معادلة من الدرجة الاولى في متغيرين هما $x\,,y$ وصيغتها العامة هي $ax+by+c=0$ حيث ان كلاً من $a\,,b\,,c$ ثوابت بحيث لا يكون كل من $a\,,b$ صفراً في وقت واحد. كما ان مجموعة الازواج المرتبة (x,y) والتي تمثل مجموعة النقاط المنتمية للخط المستقيم تحقق المعادلة أعلاه. وفيما يلي أمثلة لمعادلات تمثل خطوطاً مستقيمة: -

1) $3x-2y+5=0$ $(a=3,b=-2,c=5)$

2) $x+y=0$ $(a=1,b=1,c=0)$

3) $x=5$ $(a=1,b=0,c=-5)$

4) $y=-3$ $(a=0,b=1,c=3)$

5) $y=x$ $(a=-1,b=1,c=0)$

ولرسم المستقيم يكفي أن نعين نقطتين من نقاطه ونوصل بينهما باستخدام المسطرة. وسنعرض في ادناه اسلوباً مبسطاً لرسم المستقيم يعتمد على إيجاد النقطتين اللتين يقطع بهما المستقيم كلاً من المحورين الإحداثيين (المحور x ، المحور y) وكما يلي :-

نجد نقطة التقاطع مع المحورx بتعويض $y=0$ في المعادلة، لنحصل على الزوج المرتب $(x,0)$

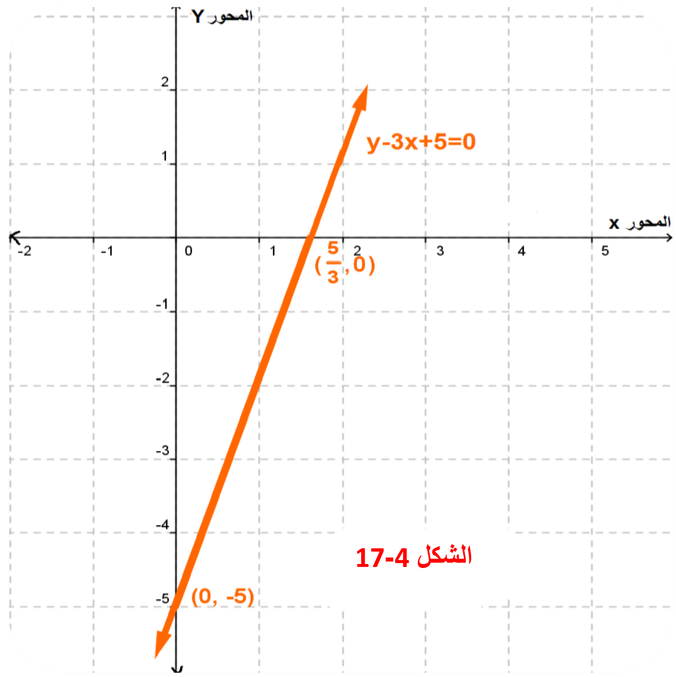
نجد نقطة التقاطع مع المحور y بتعويض $x=0$ في المعادلة ، لنحصل على الزوج المرتب $(0,y)$

نسقط النقطتين على ورق المربعات المثبت عليه المحورين الإحداثيين ونوصل بين النقطتين بخط مستقيم مستخدمين المسطرة. الخط هذا هو التمثيل البياني لمعادلة الخط المستقيم.

مثال 15:- ارسم المستقيم الذي يمثل المعادلة الخطية $y - 3x + 5 = 0$ على الورق البياني

الحل :-

x	0	$\frac{5}{3}$
y	-5	0

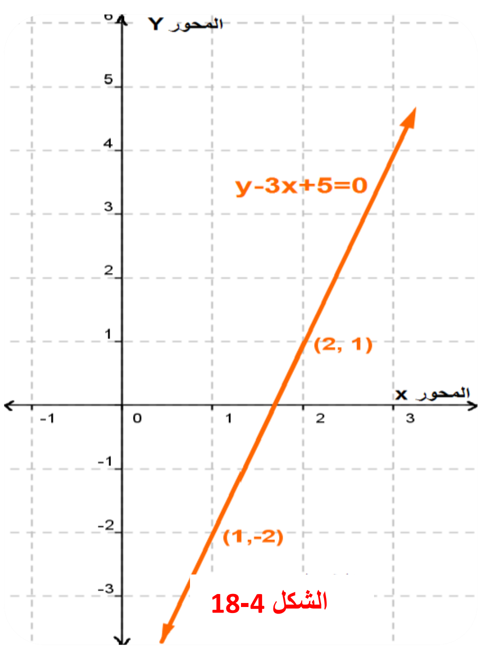


الشكل 4-17

ملاحظة :-

يمكننا أن نأخذ أي قيمتين أخيرتين في المستوى الإحداثي مثل $x = 2, y = 1$ و $x = 1 , y = -2$ ونصل بين النقطتين $(2, 1), (1, -2)$ لنحصل على المستقيم المطلوب كما في الشكل 4-18 المجاور

X	Y
2	1
1	-2



الشكل 4-18

(7-4) إيجاد ميل المستقيم ومقطعة للمحور y من معادلته

ذكرنا في البند السابق أن الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي $ax+by+c=0$ حيث أن كلاً من $a\,,b\,,c$ ثوابت بحيث لا يساوي $a\,,b$ صفراً في وقت واحد.

وبحل المعادلة هذه بالنسبة للمتغير y نحصل على: -

$$by=-ax-c$$

$$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$$

فتكون الصيغة الجديدة لمعادلة المستقيم هي :- $\boxed{y=m\,x+k}$ حيث

ميل المستقيم $\boxed{m=\frac{-a}{b}}$ ، المقطع للمحور y $\boxed{k=\frac{-c}{b}}$

ويقصد بالمقطع للمحور y (*y-intercept*) هو الإحداثي y لنقطة تقاطع المستقيم مع المحور y

ملاحظة: من الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم $(ax+by+c=0)$ فإن ميل المستقيم m هو:

$$\boxed{m=-\frac{\text{معامل}\,x}{\text{معامل}\,y}=-\frac{a}{b}}$$

مثال 16:- جد ميل المستقيم ومقطعه للمحور y في الحالات التي تكون فيه معادلة المستقيم كالاتي:

1) $2x-3y-6=0$

الحل

$$-3y=-2x+6$$

$$y=\frac{-2}{-3}x+\frac{6}{-3}=\frac{2}{3}x-2$$

$$m=\frac{2}{3}\quad,\quad k=-2$$

2) $y=x+7$

$$m=1\quad,k=7$$

مثال 17:- جد ميل كلاً من المستقيمين الموازي والمستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $2x - 3y + 6 = 0$

الحل:-

$$-3y = -2x - 6$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$m = \frac{2}{3}$$

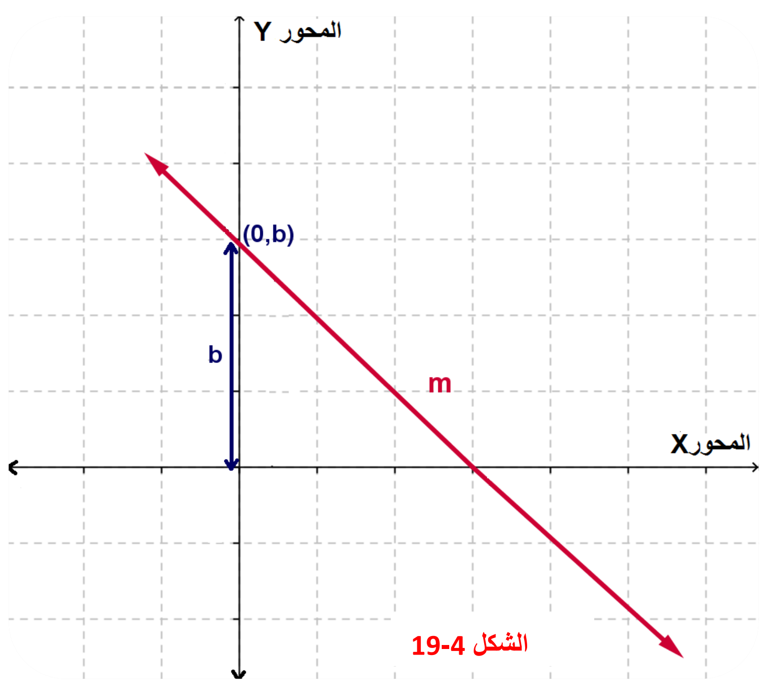
لذلك يكون ميل المستقيم الموازي له $m = \frac{2}{3}$ فيما يكون ميل المستقيم العمود عليه يساوي $\frac{-3}{2}$

(8-4) طرائق إيجاد معادلة المستقيم

سوف نتطرق في البند هذا إلى كيفية إيجاد معادلة المستقيم.

(1-8-4) معادلة المستقيم بمعلومية الميل (m) ونقطة التقاطع مع المحور y [النقطة $(0, b)$]

$y = mx + k$, k :(المقطع للمحور y)



الشكل 4-19

مثال18:- جد معادلة المستقيم الذي ميله $(m=3)$ و مقطعه للمحور y يساوي $\frac{6}{7}$

الحل :-

$$y=mx+k$$
$$m=3\ ,\ k=\frac{6}{7}$$
$$y=3x+\frac{6}{7}$$

(2-8-4) معادلة المستقيم بمعلومية الميل (m) واحدى النقاط التي تنتمي له ولتكن (x , y)

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

مثال 19:- جد معادلة المستقيم الذي ميله $(m=-7\ )$ ويمر بالنقطة $(6,2)$

الحل:-

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-2=-7(x-6)$$
$$y-2=-7x+42$$
$$7x+y-44=0$$

(3- 8-4) معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلومتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_2\neq x_1$$

مثال 20:- جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,4)$, $(3,-2)$

الحل:-

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-(-2)}{x-3}=\frac{4-(-2)}{1-3}$$
$$\frac{y+2}{x-3}=\frac{4+2}{1-3}$$

$$\frac{y+2}{x-3}=\frac{6}{-2}$$
$$\frac{y+2}{x-3}=-3$$
$$y+2=-3x+9$$
$$3x+y-7=0$$

حالات معادلة الخط المستقيم

الصيغة العامة $ax+by+c=0$, $a\neq 0$ أو $b\neq 0$
إذا علم الميل واحدى نقاط المستقيم $y-y_1=m(x-x_1)$
إذا علم الميل و المقطع للمحور y $y=mx+k$
معادلة المستقيم الموازي للمحور x $y=b$
معادلة المستقيم الموازي للمحور y $x=a$

مثال 21:- لتكن $2x-3y+6=0$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$. استخرج ما يلي: -

a) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ الموازي للمستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ ويمر بالنقطة $(1,1)$.

b) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_3}$ العمود على المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ ويمر بالنقطة $(1,1)$.

c) ارسم المستقيمات الثلاثة

الحل: -نجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ من معادلته $\quad 2x-3y+6=0$

$$y=\frac{2}{3}x+2 \quad \rightarrow m_1=\frac{2}{3}$$

a) المستقيم L_2 الموازي للمستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ له نفس الميل m_1 أي $m_2=\frac{2}{3}$ ويمر بالنقطة $(1,1)$

تكون معادلته $\quad y-1=\frac{2}{3}(x-1)$

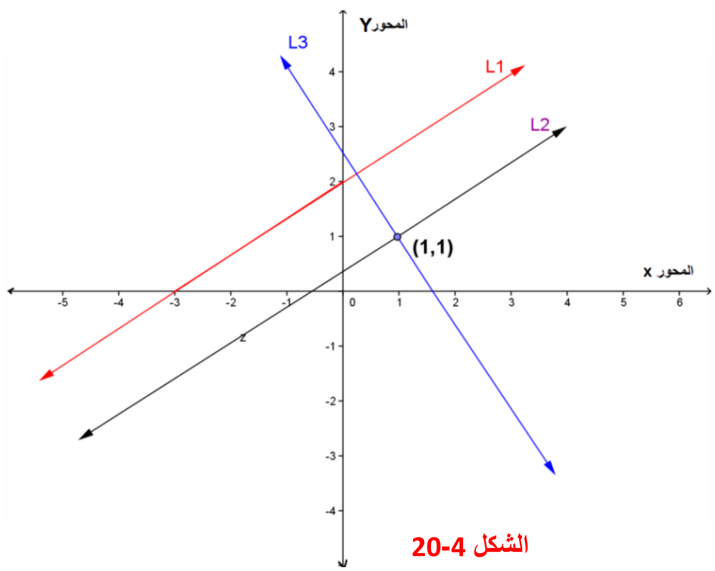
معادلة المستقيم $(\overleftrightarrow{L_2})$ $\quad 3y-2x-1=0$

b) المستقيم $\overleftrightarrow{L_3}$ العمود على المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ يكون ميله المقلوب السالب لميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ ، أي إن ميله $m_3 = \frac{-3}{2}$ ومعادلته هي: -

$$y - 1 = \frac{-3}{2}(x - 1)$$

$2y + 3x - 5 = 0 \quad (\overleftrightarrow{L_3})$ معادلة المستقيم

c) المخطط البياني للمستقيمات الثلاثة في الشكل (4-20) الآتي



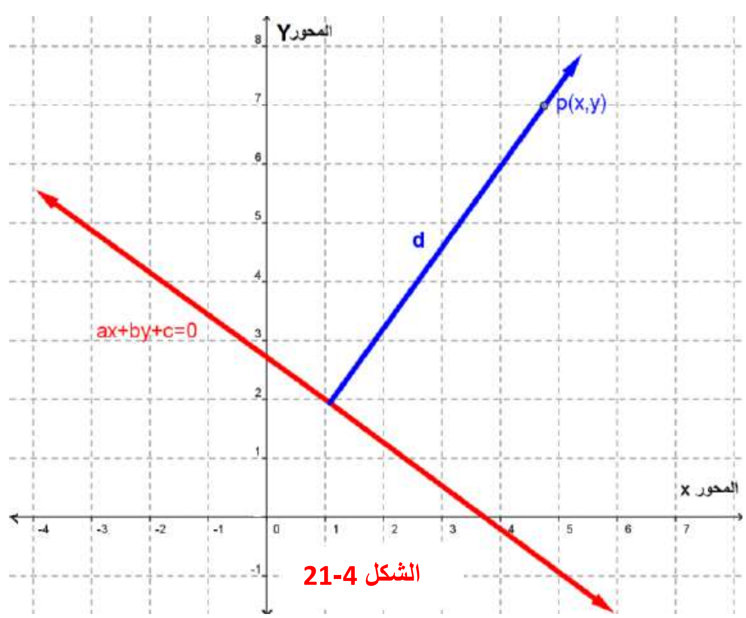
الشكل 4-20

(4-9) إيجاد بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

ليكن d هو طول العمود النازل من نقطة $p\,(x, y)$ على المستقيم $ax + by + c = 0$

فأنه يمكننا ان نثبت إن

$$\boxed{d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



الشكل 4-21

مثال 22:- جد بُعد النقطة $P(-1,1)$ عن المستقيم $3x-4y+5=0$.

الحل: -

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|3\times(-1)-4\times(1)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{|-2|}{5}=\frac{2}{5}$$ وحدة طول

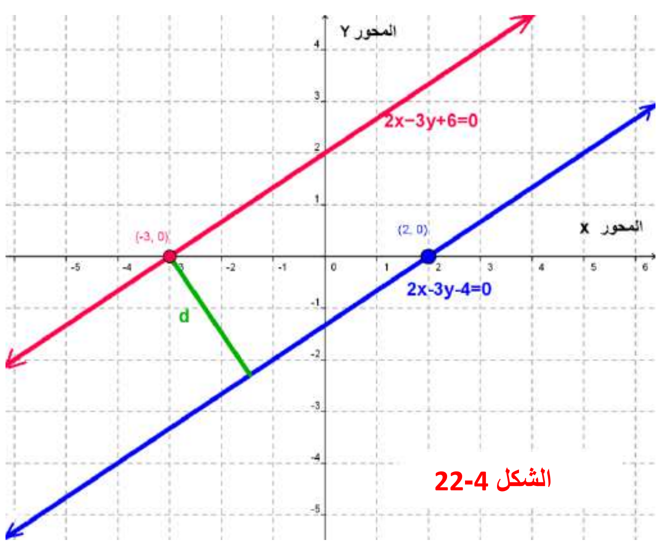
مثال 23:- :- جد البُعد بين المستقيمين المتوازيين

$$2x-3y+6=0$$
$$2x-3y-4=0$$

الحل: - في الشكل(4-22) أدناه نأخذ أي نقطة مناسبة على اي من المستقيمين ولتكن $(-3,0)$ وهي نقطة تقاطع المستقيم $2x-3y+6=0$ مع المحور x ثم نجد البعد بين النقطة هذه والمستقيم الثاني $2x-3y-4=0$

$$d=\frac{|2\times(-3)-3\times(0)-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{13}}$$ وحدة طول



الشكل 4-22

تمارين (4-3)

1. جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{5}$ ويمر بالنقطه $(1, -3)$.
2. جد معادلة المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب للمحورx زاوية قياسها $45°$ ويمر بالنقطة $(3, 2)$
3. جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(11, -2)$ ، $(7, -4)$.
4. جد معادلة المستقيم الذي ميله 7 و مقطعه للمحور y هو (11).
5. جد ميل المستقيم $2x + 4y - 7 = 0$ وجد مقطعه للمحور y .
6. برهن ان المستقيم $3x + 9y - 7 = 0$ يوازي المستقيم $12y + 4x - 25 = 0$.
7. برهن ان المستقيمين $5x + y + 32 = 0$ ، $x - 5y + 27 = 0$ متعامدان .
8. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, -2)$ والموازي للمستقيم $4x - 2y + 5 = 0$.
9. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-5, 2)$ والعمود على المستقيم $3x - 6y = 10$.
10. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(4, 6)$ والموازي للمستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة $(-5, 2)$.
11. جد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $x + 2y = 5$ و مقطعه للمحورy يساوي (-2).
12. مستقيمان متعامدان أحدهما يمر بالنقطتين $(-5, -2)$, $(4, 6)$ والآخر يمر بالنقطة $(5, 1)$ فما معادلة كل منهما؟

الفصل الخامس

علم الاحصاء

الأهداف السلوكية:

يجب على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

1. **يتعرف على مفهوم المتغير ويلم بتعريفه .**
2. **يتعرف على أنواع المتغيرات .**
3. **يلم بتعريف المجتمع والعينة .**
4. **يتعرف على الرموز الإحصائية .**
5. **يستوعب طرق جمع البيانات وتبويبها وتصنيفها .**
6. **يلم بأساليب جمع البيانات الوصفية والكمية .**
7. **يلم بأساليبك جمع البيانات المستمرة وغير المستمرة .**

الفصل الخامس

علم الاحصاء

(1-5) تعريف المتغير
(2-5) أنواع المتغيرات
(3-5) تعريف المجتمع والعينة
(4-5) الرموز الإحصائية
(5-5) انواع البيانات الاحصائية.
(6-5) طرق وأساليب جمع البيانات الاحصائية.

الفصل الخامس

علم الاحصاء

(5- 1) تعريف المتغير

عند دراسة صفة معينة مثل عدد الثمرات في شجرة البرتقال لمجموعة معينة من أشجار البرتقال فسنجد اختلافات في عدد الثمرات من شجرة لأخرى، وفي هذه الحالة يطلق على صفة عدد الثمرات بالشجرة بمصطلح المتغير. وكـذلك عند دراسة صفــة حاصــل البذور لمحصــول الرز في وحدة المســاحة (كغم /دونم) لمجموعة من المزارع، فأننا نجد اختلافات في كمية حاصل البذور في وحدة المساحة من مزرعة لأخرى، وفي هذه الحالة نطلق على صفة الحاصل بمصطلح المتغير.

تعريف المتغير (*Variable*):- هو اي ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرداتها

(5 -2) أنواع المتغيرات

تنقسم المتغيرات إلى نوعين:

1) متغيرات نوعية أو وصفية (*Qualitative Variable*)

هي بيانات غير رقمية، أو بيانات رقمية مرتبة في شكل مستويات أو في شكل فئات رقمية، ومن ثم تقاس البيانات الوصفية بمعيارين هما:

a) بيانات وصفية مقاسة بمعيار اسمي (*Nominal Scale*)

وهي بيانات غير رقمية تتكون من مجموعات : متنافية، كل مجموعة لها خصائص تميزها عن المجموعة الأخرى، كما أن هذه المجموعات لا يمكن المفاضلة بينها، ومن الأمثلة على ذلك:

– الجنس : متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار اسمي " ذكر – أنثى ".

– الحالة الاجتماعية : متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار أسمي " متزوج، أعزب أرمل ، مطلق ".

– أصناف التمور :متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار أسمي " برحي ،خستاوي ، زهدي ، مكتوم".

– الجنسية : متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار أسمي " عراقي، غير عراقي"

وهذا النوع من البيانات يمكن اعطاء مجموعاته رموزاً أو أرقاماً، فمثلا الجنسية يمكن إعطاء الجنسية (عراقي) الرمز (1) ، والجنسية (غير العراقي) الرمز (2)

b) بيانات وصفية مقاسة بمعيار ترتيبي (*Ordinal Scale*)

تتكون من مستويات، أو فئات يمكن ترتيبها تصاعديا أو تنازليا، ومن الأمثلة على ذلك:

– تقديرات النجاح للطالب: متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار ترتيبي " مقبول، متوسط، جيد، جيد جدا، امتياز"

– المستوى التعليمي :متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار ترتيبي "أمي ، يقرأ ويكتب، ابتدائية، متوسطة، ثانوية ، جامعية ، أعلى من جامعية"

- المستوى الاقتصادي : متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار ترتيبي: " غني ، متوسط ، فقير"

2) متغيرات كمية (عددية)   (*Quantitative Variables*)

وهي تلك الظواهر أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بأرقام عددية وتنقسم إلى:

a) متغير متقطع (غير مستمر)

يمكن أن يأخذ القيم 2، 3، 4، 5 ... ولا يمكن أن يأخذ x القيم 1.5 ، 3.25، 5.17.ومن الأمثلة الأخرى على المتغيرات المتقطعة هي عدد الثمرات في النباتات المثمرة، عدد الطلبة في المدارس ، عدد أشجار النخيل في محافظة ما.

بصورة عامة البيانات المستحصلة من طريقة العد (*counting*) تعتبر بيانات لمتغير متقطع أو غير مستمر.

b) متغير متصل (مستمر)(*Continuous Variable*)

وهو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة بين قيمتين معنيتين، وكأمثلة عن المتغيرات المتصلة: كمية الحاصل ، الطول، الوزن، الزمن، السرعة ...الخ، فإذا كان x هو متغير الطول مثلا فإن x يمكن أن تأخذ القيم 15متر، 11.3 متر، 14.75 متر، أي أن المتغير x يمكن أن نأخذ أي قيمة في فترة معينة. وبصورة عامة تعتبر البيانات المستحصلة من طريقة القياس (*Measurement*) بيانات لمتغير مستمر أو متصل.

(5 – 3) تعريف المجتمع والعينة

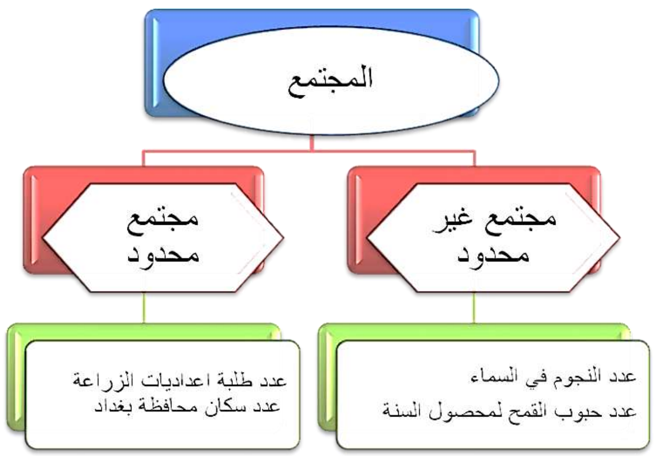
المجتمع من الناحية الإحصائية يمثل جميع الافراد (أو العناصر) التي تشترك في صفة متغيرة واحدة أو اكثر تميزه تمييزا تاما عن بقية المجتمعات.

تعريف المجتمع (Population) هو جميع القيم لمتغير ما

ويتعلق مفهوم المجتمع بالهدف المحدد للبحث الاحصائي .فمثلا إذا كان هدف البحث حساب عدد النخيل في العراق فعندها يكون المجتمع هو جميع مزارع النخيل في العراق بدون استثناء. وقد تشكل محافظة البصرة مجتمعا احصائيا إذا كان الهدف هو دراسة عدد النخيل في محافظة البصرة. وقد يشكل قضاء أبي الخصيب مجتمعاً احصائياً إذا كان الهدف هو دراسة أعداد النخيل في قضاء أبي الخصيب. وتختلف المجتمعات في أحجامها (عدد مفرداتها) فبعضها صغير الحجم وبعضها كبير والبعض الاخر غير معروف الحجم. لذا فان المجتمعات تقسم الى:

a) مجتمع محدود (*Finite Population*) إذا كان عدد افراد المجتمع محدوداً كما هو الحال في عدد أشجار النخيل في مزرعة ما ، أو عدد الطلبة في كلية الزراعة أو عدد حقول الدواجن في بغداد.

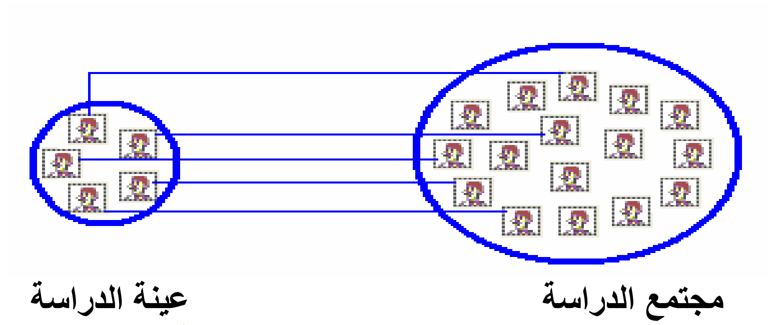
b)مجتمع غير محدود(*Infinite Population*) إذا كان حجم المجتمع كبيراً جداً ولا يمكن حصره مثلا عدد الأسماك في الخليج العربي ، عدد الحشرات على أشجار الحمضيات في محافظة ديالى ، عدد الطيور في الأهوار.



العينة (*Sample*)

في حالة عدم أمكانية الحصول على قيم أو بيانات عن المجتع لأسباب مادية أو فنية ، لذا نلجأ الى أخذ عينة معينة من المجتمع بطريقة ما بحيث تمثله تمثيلا حقيقيا ، لذا تعرف العينة كالاتي:

تعريف العينة:- هي جزء من المجتمع مأخوذة منه بطريقة عشوائية وتكون ممثلا له تمثيلا حقيقيا



شكل (5-1) الفرق بين المجتمع والعينة

يعتمد أسلوب العينات على معاينة جزء من المجتمع محل الدراسة ، يتم اختياره بطريقة علمية سليمة ودراسته ثم تعميم نتائج العينة على المجتمع، ويتميز هذا الاسلوب بالآتي:

1 – تقليل الوقت والجهد.

2 – تقليل التكلفة.

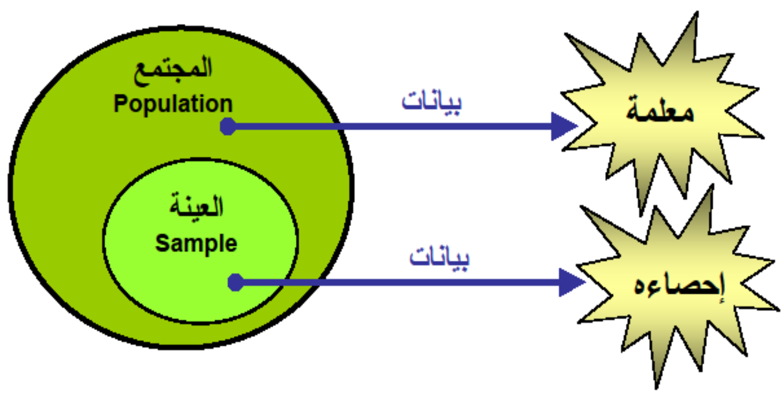
3- الحصول على بيانات أكثر تفصيلا ، وخاصة إذا جمعت البيانات من خلال استمارة استبيان.

كما إن أسلوب المعاينة يفضل في بعض الحالات التي يصعب فيها أجراء حصر شامل مثل معاينة دم المريض أو تعداد لعدد الأسماك في البحر.ولكن يعاب على الاسلوب هذا بأن النتائج المستحصلة منه تكون أقل دقة من نتائج أسلوب الحصر الشامل لاسيّما إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا.

الثوابت (أو المعالم) والإحصاءات(*Parameters and Statistics*)

يطلق على المقاييس التي تحسب من المجتمع نفسه (أي من جميع القيم) مصطلح الثوابت أو المعالم، أما المقاييس المناظرة المحسوبة من العينة فتسمى الأحصاءات أو التقديرات لانها لا تمثل سوى تقديرات لمعالم المجتمع الذي اخذت منه العينة.

وتجدر الاشارة الى أن معالم المجتمع محددة القيم (ثابتة) بينما الأحصاءات المناظرة تتغير بتغير العينة.



(4-5)الرموز الإحصائية (*Statistical Notation*)

نظرا لاستخدام كافة المراجع العلمية العالمية للرموز والمعادلات الرياضية اللاتينية لكونها رموزا عالمية متفقاً عليها من جهة ، ولعدم وجود أتفاق تام بالوقت الحاضر على تعريبها من جهة أخرى، لذا سوف نستخدم تلك الرموز وذلك لسهولة الاستفادة من المراجع الأجنبية والعلمية الأخرى.

يرمز للمتغير الرمز x أو y أو z ولكل قيمة له بالرمز x_i أو y_i أو z_i ويمثل الرمز i رقم المفردة للمتغير. فلو كانت اطوال اربع أشجار نخيل هي 6 ، 4 ، 3 ، 5 متر على التوالي فان المتغير x يمكن أن يأخذ أي قيمة من هذه القيم الاربعة أما x_i حيث ($i = 1, \dots, 4$) فأنها تأخذ قيمة معينة واحدة من هذه القيم ، أي أن :-

$x_1 = 5$ القيمة الأولى للمتغير x
$x_2 = 3$ القيمة الثانية للمتغير x
$x_3 = 4$ القيمة الثالثة للمتغير x
$x_4 = 6$ القيمة الرابعة للمتغير x

ويرمز لمجموع قيم المتغير بالرمز:-

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

حيث إن الرمز $\sum$ هو حرف أغريقي يسمى(*Sigma*) ويعني مجموع ، والرقمان i و n هما حدا المجموع وعليه فإن الرمز

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

يقرأ مجموع قيم x من المشاهدة الأولى التي تسلسلها (1) وحتى الاخيرة التي تسلسلها(n) ويعني ذلك

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

أما الرمز

$$\sum_{i=3}^{5} x_i = x_3 + x_4 + x_5$$

فانه يقرأ مجموع قيم x الثالثة والرابعة والخامسة .
أما الرمز

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

فانه يعني مجموع مربعات قيم x من المشاهدة الأولى الى الاخيرة، أي

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

والرمز

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

يعني مربع مجموع المشاهدات اي

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2$$

ويرمز لحاصل ضرب مجموعين لقيم متغيرين بالرمز $(\sum x_i)(\sum y_i)$ حيث أن

$$(\sum x_i)(\sum y_i) = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n)$$

ملاحظة :
في حالة عدم ذكر حدي المجموع (i و n) فتعني اخذ جميع القيم من 1 الى n

مثال 1:- إذا كانت قيم المتغير x كالاتي　　　$x = 6,\ 2,\ 3 , 5 , 4$

وقيم المتغير y كالاتي　　　$y = 1 , 3,\ 7 , 8 , 6$

جد :

(a) $(\sum x_i)$　　(b) $\sum_{i=2}^{4} y_i$　　(c) $\sum {x_i}^2$　　(d) $(\sum y_i)^2$

(e) $(\sum x_i)(\sum y_i)$　　(f) $\sum x_i . y_i$

الحل:-

(a) $(\sum x_i) = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$

$= 6 + 2 + 3 + 5 + 4 = 20$

(b) $\sum_{i=2}^{4} y_i = y_2 + y_3 + y_4 = 3 + 7 + 8 = 18$

(c) $\sum {x_i}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2$

$= 6^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2$

$= 36 + 4 + 9 + 25 + 16 = 90$

(d) $(\sum y_i)^2 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)^2$

$= (1 + 3 + 7 + 8 + 6)^2$

$= (25)^2 = 625$

(e) $(\sum x_i)(\sum y_i) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$

$= (6 + 2 + 3 + 5 + 4)(1 + 3 + 7 + 8 + 6) = (20)(25) = 500$

(f) $\sum x_i . y_i$　　　تعني مجموع حاصل ضرب x في قيم y

$\sum x_i . y_i = x_1 . y_1 + x_2 . y_2 + x_3 . y_3 + x_4 . y_4 + x_5 . y_5$

$= (6 \times 1) + (2 \times 3) + (3 \times 7) + (5 \times 8) + (4 \times 6) = 97$

مثال 2:- إذا علمت بان قيم المتغيرين x و y هما كالآتي:

$$x = 5, 3, 6, 2$$

$$y = 4, 7, 9, 5$$

جد :

(a) $\sum x_i - 5$ (b) $\sum(y_i - 2)$ (c) $\sum(x_i + y_i)$ (d) $\sum(x_i - 1).(y_i - 2)$

الحل :

(a) $\sum x_i - 5 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 5$

$$= (5 + 3 + 6 + 2) - 5 = (16) - 5 = 11$$

(b) $\sum(y_i - 2) = (y_1 - 2) + (y_2 - 2) + (y_3 - 2) + (y_4 - 2)$

$$= (4 - 2) + (7 - 2) + (9 - 2) + (5 - 2) = 17$$

(c) $\sum(x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$

$$= (5 + 4) + (3 + 7) + (6 + 9) + (2 + 5) = 41$$

(d) $\sum(x_i - 1).(y_i - 2) = (x_1 - 1).(y_1 - 2) + (x_2 - 1).(y_2 - 2) + (x_3 - 1).(y_3 - 2) + (x_4 - 1).(y_4 - 2)$

$$= (5 - 1)(4 - 2) + (3 - 1)(7 - 2) + (6 - 1)(9 - 2) + (2 - 1)(5 - 2) = 56$$

تمرين (5-1)

1. عين نوع المتغير نوعياً أو كمياً في كل من الحالات الآتية:
   (a) لون الأزهار في نبات الداوودي.
   (b) كمية حاصل الذرة الصفراء في الدونم الواحد.
   (c) الحالة الزوجية.
   (d) لون العيون.
   (e) وزن العجول.
2. حدد نوع المتغير (مستمراً ام متقطعاً) للحالات الآتية:
   (a) عدد أفراد العائلة .
   (b) مساحة المزرعة .
   (c) عدد الكتب في مكتبة المدرسة.
   (d) عدد النخيل في متنزه الزوراء.
   (e) أطوال طلبة الأول زراعي في بابل.
3. اذكر بعض الامثلة للمجتمعات والعينات .
4. ما الفرق بين المجتمع المحدود والمجتمع غير المحدود مع ذكر أمثلة لكل منهما.
5. عرّف ما يلي:- المجتمع ، العينة ، المعالم ، الإحصاءات.
6. تأمل سلسلتي الأعداد الاتيتين عن المتغيرين x و y

$$x = 2 , 4 , 5 , 8 , 3$$
$$y = 1 , 2 , 3 , 2 , 3$$

جد:-

$$(1) \sum_1^5 x_i \quad (2) \sum_1^5 {x_i}^2 \quad (3) \sum_1^5 3x_i \quad (4) \sum_1^5 (x_i - 4)$$

$$(5) (\sum_1^5 x_i)^2 \quad (6) \sum_1^5 \frac{1}{x_i} \quad (7) \sum_1^5 x_i \, . \, y_j \quad (8) \sum_1^5 (x_i - y_i)$$

7. البيانات الآتية تمثل قيم ظاهرة معينة

x	2	6	5	10	7	9	8

المطلوب ايجاد

$$(1)\sum_{1}^{4} x_i \qquad (2)\sum_{4}^{7} {x_i}^2 \qquad (3)\sum_{2}^{5}(x_i - 2) \qquad (4)\sum_{1}^{4}(x_i \; - 5)^2$$

$$(5)\sum_{3}^{6}\frac{1}{x_i}$$

8. إذا كانت القيم 3 ,7 ,2 ,4 ,6 تمثل اطوال خمس نباتات ، ما قيمة:

$$(1)\sum x_i \qquad (2)\sum_{1}^{5} {x_i}^2 \qquad (3)(\sum_{1}^{5} x_i)^2 \qquad (4)\sum x_i - 3$$

9. إذا كانت القيم 10 ,5 ,8 ,7 تمثل عدد الفسائل في اربع نخلات ، ما قيمة:

$$(a)\sum(x_i + 2) \qquad (b)\sum_{1}^{4} {x_i}^2 - \sum_{1}^{4} x_i$$

10. لو فرضنا قيم x و y هي

الرمز الدليلي(i)	الوزن (y)	الطول (x)
1	8	4
2	12	7
3	10	5
4	6	2
5	14	6

جد:

$$\sum_{1}^{3} x_i . y_i$$

(5-5) أنواع البيانات الإحصائية

البيانات الإحصائية هي المواد الأولية للإحصاء ، والتي يمكن تبويبها وتصنيفها وأجراء التحاليل عليها واستنباط التوصيات منها. وتعتمد طبيعة البيانات الإحصائية على الأهداف المطلوبة منها ، لذا فان الفصل هذا سيتناول مصادر البيانات وطرق جمعها.

ويمكن تقسيم البيانات الإحصائية إلى نوعين أساسيين من البيانات هما:

1. البيانات النوعية(*Qualitative data*)

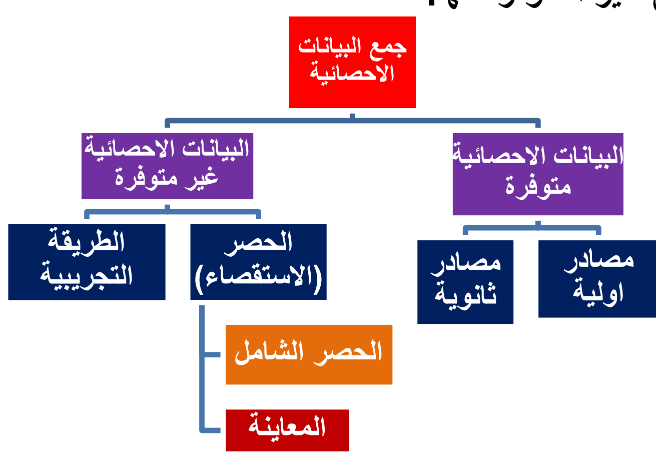
وهي بيانات وصفية، تشمل الظواهر التي لا تخضع للقياسات الكمية، ويصعب التعبير عنها بصورة عددية. كما تعرف أحياناً باسم (البيانات التصنيفية) لأنها تصنف البيانات حسب الصفات، سواء أكانت ذلك من حيث النوع، مثل تصنيف التربة إلى طينية وغرينية ورملية، أم كان ذلك من حيث الدرجة، مثل تصنيف القوى العاملة حسب الدرجة التعليمية، إلى أمي وملم بالقراءة والكتابة، حاصل على الشهادة الابتدائية...الخ، حيث تشتمل البيانات على عدد الأفراد الذين ينتمون إلى كل صفة من هذه الصفات.

2. البيانات الكمية (*Quantitative data*)

وهي بيانات رقمية، تشمل الظواهر القابلة للقياسات الكمية، ويمكن التعبير عنها بصورة عددية، مثل كميات الأمطار، وأعمار السكان وكميات الإنتاج.. الخ، وغير ذلك من البيانات التي تعكس القيم الفعلية للظواهر. ومن الجدير بالذكر إن معظم الأساليب الإحصائية تعنى بمعالجة البيانات الرقمية، وهذا على خلاف البيانات النوعية، التي لا تستخدم فيها سوى بعض الأساليب الإحصائية المحدودة.

(6-5) طرق واساليب جمع البيانات الإحصائية

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التي يعتمد عليها البحث الإحصائي، كما إن جمع البيانات بأسلوب علمي صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة في التحليل، وقد تكون البيانات المطلوبة متوفرة سواء كانت منشورة أم غير منشورة نتيجة لجمعها من قبل جهات رسمية أو غير رسمية وفي الحالة هذه فأن جمعها يتطلب الرجوع الى تلك المصادر . أما إذا كانت البيانات غير متوفرة فان الأمر يتطلب أجراء استقصائيات أو تجارب ميدانية لتوفيرها. وسيتناول الفصل هذا مصادر البيانات المتوفرة والطرق الإحصائية لجمع غير المتوفر منها.



ولدراسة طرق جمع البيانات، يجب الإلمام بالنقاط الآتية:

1- مصادر جمع البيانات المتوفرة .

2- أسلوب جمع البيانات غير المتوفرة.

1- مصادر جمع البيانات المتوفرة

هناك مصدران للحصول منها على البيانات هما:

a) المصادر الأولية ***Primary Source***

b) المصادر الثانوية. ***Secondary Source***

a) المصادر الأولية

وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث يقوم الباحث نفسه بجمع البيانات من المفردة محل البحث مباشرة، فعندما يهتم الباحث بجمع بيانات عن الأسرالريفية، يقوم بإجراء مقابلة مع رب الأسرة، ويتم الحصول منه مباشرة على بيانات خاصة بأسرته، مثل بيانات المنطقة التابع لها، وعدد أفراد الأسرة وأعمارهم والمستوى التعليمي ، ومساحة الملكية الزراعية ، وأنواع المحاصيل المزروعة، وأعداد وأنواع الثروة الحيوانية التي يمتلكها، وأنواع المكننة الزراعية التي يستخدمها ونوع ملكيتها (ملك شخصي أم ايجار) والدخل الشهري، ... وهكذا. أو قد تقوم جهات رسمية أو شبه رسمية بجمع أنواع معينة من البيانات بشكل دوري أو خلال فترة زمنية محددة كالجهاز المركزي للإحصاء أو الهيأة العامة للأنواء الجوية، وقد تصدر الجهات هذه نشرات احصائية دورية. ويتميز النوع هذا من المصادر بالدقة والثقة في البيانات، لأن الباحث هو الذي يقوم بنفسه بجمع البيانات من المفردة محل البحث مباشرة لكن أهم ما يعاب عليها إنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير، ومن ناحية أخرى فأنها مكلفة من الناحية المادية.

b) المصادر الثانوية

وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل غير مباشر، بمعنى آخر يتم الحصول عليها بواسطة أشخاص آخرين، أو أجهزة، وهيئات رسمية اخرى غير متخصصة بجمع البيانات الإحصائية، مثل نشرات منظمة الأغذية والزراعة الدولية....وهكذا.

ومن مزايا النوع هذا من المصادر، توفير الوقت والجهد والمال، إلا انها تحتوي على تفاصيل اقل من المصادر الأولية ، وإن درجة ثقة الباحث فيها ليست بالدرجة نفسها في حالة المصادر الأولية.

2- أسلوب جمع البيانات غير المتوفرة

يتحدد الأسلوب المستخدم في جمع البيانات ، حسب الهدف من البحث، وحجم مجتمع محل البحث، وهناك أسلوبان لجمع البيانات هما:

a) الاستقصاء (المسح) (*Survey Method*)

b) الطريقة التجريبية (*Experimental Method*)

a. الاستقصاء (المسح) (*Survey*)

إن مصطلح الاستقصاء بالمفهوم الاحصائي يعني جمع البيانات حول صفات وخصائص الأشياء القائمة دون التحكم بأي من العوامل التي تؤثر على المتغير قيد الدراسة. فمثلا لو أردنا جمع البيانات حول أعداد ومواصفات الأغنام العراقية ، فإن عملية جمع البيانات الإحصائية تتركز على عدد، جنس ، عمر ، ونوع الأغنام دون التحكم بالعوامل التي تؤثر فيها السلالات ، الاعلاف ، الخدمات البيطرية ، الحظائر ...الخ.

أما درجة تغطية الاستقصاء لعناصر المجتمع فقد تكون :

أ ولاً) أسلوب الحصر الشامل (التعداد) (*Census*)

ثانياً) أسلوب المعاينة. (*Sampling*)

أولا :أسلوب الحصر الشامل (التعداد) (*Census*)

يستخدم الأسلوب هذا إذا كان الغرض من البحث هو حصر جميع مفردات المجتمع، وفي الحالة هذه يتم جمع بيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع بلا استثناء، كحصر جميع المزارع التي تنتج

التمور، جميع الحقول المنتجة للدواجن، ويتميز أسلوب الحصر الشامل بالشمول وعدم التحيز، ودقة النتائج لكن يعاب عليه أنه يحتاج إلى الوقت والجهد، والتكلفـــة العالية
ويتم استخدام الأسلوب هذا في الحالات الآتية:

(1) إذا كان الغرض من البحث جمع بيانات عن مفردات المجتمع بصفة شخصية أو فردية فإن الأسلوب الذي يتبع في هذه الحالة هو أسلوب الحصر الشامل. فلو كان الغرض من البحث مثلاً، جمع بيانات عن مجتمع الآلات والمكائن الزراعية الموجودة في محافظة ما، وذلك للوقوف على الآلات التي تحتاج إلى إصلاح وصيانة، فأن البيانات المطلوبة في هذه الحالة تخص كل آلة على حده، وبالتالي فإنها مطلوبة بصفة فردية وعليه فإنه لابد من استخدام أسلوب الحصر الشامل لحصر كل آلة على حده.

(2) يمكن استخدام الحصر الشامل عندما يريد الباحث الحصول على نتائج بمستوى عال من الدقة. فمثلاً تقوم الشركات المنتجة لأنابيب أفران الغاز بفحص الأنابيب هذه بأسلوب الحصٍر الشامل، وذلك للتأكد من سلامتها حتى لا يكون هناك أي احتمال لبيع أنابيب غير سليمة، وبالتالي تعريض حياة المواطنين للخطر. وكذلك شركات إنتاج الأدوية التي تحمل طابع الخطورة يطبق عليها أسلوب الحصر الشامل حتى تتمكن الشركة من التأكد من سلامتها.

(3) ويمكن استعمال أسلوب الحصر الشامل في حالة ما إذا كانت مفردات المجتمع المراد دراسته غير متجانسة وإذا ما كان المجتمع صغيراً نسبياً.

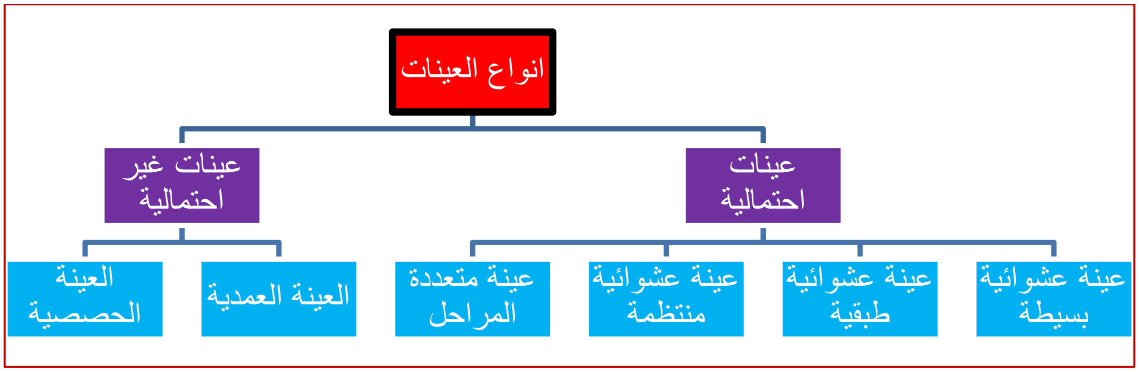
ثانيا :أسلوب المعاينة *Sampling*

يعتمد الأسلوب هذا على معاينة جزء من المجتمع محل الدراسة، يتم اختياره بطريقة علمية سليمة، ودراسته ثم تعميم نتائج العينة على المجتمع، و يتميز الأسلوب هذا بتقليل الوقت والجهد فضلا" عن تقليل التكلفة، والحصول على بيانات أكثر تفصيلا، لاسيّما إذا جمعت البيانات من خلال استمارة استبيان، كما أن أسلوب المعاينة يفضل في بعض الحالات التي يصعب فيها إجراء حصر شامل، مثل معاينة دم المريض، أو إجراء تعداد لعدد الأسماك في البحر أو أعداد حشرات الحميرة والدوباس التي تصيب النخيل.

لكن يعاب على أسلوب المعاينة إن النتائج التي ينتجها الأسلوب هذا أقل دقة من نتائج أسلوب الحصر الشامل، لا سيًما إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا.

أنواع العينات

ويمكن تقسيم العينات وفقا لأسلوب اختيارها إلى نوعين هما:
1 -العينات الاحتمالية 2 -العينات غير الاحتمالية



1- العينات الاحتمالية

هي العينات التي يتم اختيار مفرداتها وفقا لقواعد الاحتمالات، بمعنى آخر هي التي يتم اختيار مفرداتها من مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية، بهدف تجنب التحيز الناتج عن اختيار المفردات،ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية، ما يلي:

a. العينة العشوائية البسيطة (*Simple Random Sampling*)

هي طريقة الاختيار التي تضمن احتمالاً متساوياً لكل عنصر من عناصر المجتمع بأن يكون مشمولاً في العينة واحتمالاً متساوياً لكل عينة من العينات التي يمكن تشكيلها من عناصر المجتمع .

مثال: إذا كان لدينا مجتمع مكون من 5 عناصر هي (A,B,C,D,E) وأردنا اختيار عينة عشوائية بسيطة مكونة من 3 عناصر، فان العينة التي يمكن اختيارها ستكون واحدة من العينات لتي يمكن الحصول عليها من المجتمع هذا وهي:

ABC , ABD , ABE , ACE , ADE , BCD , BCE , BDE , CDE

ويجب الاشارة الى أن العنصر لا يتكرر في أي عينة لأن الترتيب غير مهم وذلك لان الترتيبات ABC , ACB , BAC , CAB , CBA هي عينة واحدة تشمل العناصر A,B,C

b. العينة العشوائية الطبقية (*Stratified Random Sampling*)

وهي طريقة اختيار عينة طبقية عن طريق تقسيم المجتمع الى اقسام متجانسة تعرف بالطبقات ، ثم اختيار عينة عشوائية فرعية بصورة عشوائية من كل طبقة ، وهذه العينات الفرعية مجتمعة تكون العينة الطبقية.

مثال: يراد اختيار عينة طبقية تمثل حاصل غلة محصول الحنطة في الدونم الواحد في العراق...

أولا) نقسم العراق الى 3 مناطق متجانسة (طبقات) وفق الظروف المناخية وهي المنطقة الشمالية والوسطى والجنوبية.

ثانيا) نأخذ عينة عشوائية في كل من المنطقة الشمالية والوسطى والجنوبية.

ثالثا) العينات الثلاث مجتمعة تمثل العينة الطبقية.

c. العينة العشوائية المنتظمة (*Systematic Random Sampling*)

وهي طريقة اختيار عينة منتظمة وذلك عن طريق اختيار وحدة المعاينة المرقمة k والتي تسمى نسبة المعاينة وهي حجم المجتمع الى حجم العينة ثم اختيار رقم عشوائي بين 1 و k ليكون رقم العنصر الأول في العينة ثم اضافة k ومضاعفاتها الى الرقم الأول المختار لغرض تحديد عناصر العينة الاخرى الى ان يكمل حجم العينة.

مثال: يراد اختيار عينة منتظمة من شعبة (أ) للأول زراعي مكونة من خمسة طلاب علما بان عدد الطلبة في الشعبة 40 طالبا.

أولا - نحسب نسبة المعاينة k :

$$K = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{40}{5} = 8$$

ثانيا - نختار رقماً عشوائياً بين 1 و 8 فليكن مثلا الرقم 6

ثالثا - نختار العنصر الأول من العينة الطالب الذي تسلسله 6 ثم نضيف نسبة المعاينة (8) ومضاعفاتها الى الرقم 6 الى ان نكمل حجم العينة ، أي يكون اختيار الطلبة الذين تسلسلهم في الصف

6 ، 14 ،22 ، 30 ، 38 .

d. العينة المتعددة المراحل (العنقودية) *Multi-Stage (Cluster) sampling*

هي طريقة لاختيار عينة متعددة المراحل وذلك عن طريق اجراء الاختيار على مراحل متعددة . فإذا كان المجتمع مقسما الى اقسام فإننا في المرحلة الأولى نختار عشوائيا عينة من الاقسام هذه وفي المرحلة الثانية نختار عينة عشوائية من العينة التي اختيرت في المرحلة الأولى وهكذا حتى نحصل على حجم العينة المقرر.

مثال : لو أردنا معرفة غلة أصناف النخيل البرحي والخستاوي والمكتوم في محافظة ديالى . وأخذنا عينة مكونة من 1000 نخلة من كل صنف من اصناف النخيل أعلاه وفق أسلوب المعاينة المتعددة المراحل ، فانه علينا أن نقوم بما يلي:

أولا- نختار 10 قرى من قرى محافظة ديالى التي تشتهر بزراعة النخيل.

ثانيا – نختار عشرة بساتين عشوائيا في كل قرية.

ثالثا – نختار 10 أشجار نخيل من كل صنف في كل بستان تم اختياره.

وبالتالي يكون حجم العينة لدينا مكونة من 1000 نخلة لكل صنف .

2- العينات غير الاحتمالية

هي التي يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير عشوائية، حيث يقوم الباحث باختيار مفردات العينة بالصورة التي تحقق الهدف من المعاينة ومن أهم أنواع العينات غير الاحتمالية:-

a. العينة العمدية (***Judgmental Sample***)

وهي الطريقة التي تستخدم لأخذ عينة صغيرة لمجتمع كبير ، ويلجأ الباحثون الى الطريقة هذه عندما يكون المجتمع في درجة عالية من التجانس. لذا يعمد بعض الباحثين الى استخدام هذا الأسلوب معتقدين بتمثيل العينة هذه للمجتمع. وغالبا ما يلجأ الباحث الى اختيار العينات القريبة من متوسط المجتمع.

مثال: اختيار قرية في السماوة لحصر الأمراض التي تصيب الجمال في العراق

وهنا يعتقد الباحث بأن الأمراض التي تصيب الجمال في السماوة هي نفسها التي تصيب الجمال في مناطق العراق جميعها .

b. العينة الحصصية (*Quota Sample*)

وتستخدم عندما يكون المجتمع الإحصائي غير متجانس ومؤلف من طبقات. نقوم باختيار عينة من كل طبقة بصورة موضوعية (غير عشوائية) يتناسب حجمها مع حجم الطبقة في المجتمع ، ثم ندمج العينات هذه في عينة واحدة تسمى العينة الحصصية.

(b الطريقة التجريبية (*Experimental Method*)

ان مصطلح التجربة يقصد به جمع البيانات عند ممارسة سيطرة فعلية على واحد أو أكثر من العوامل التي تؤثر على المتغير قيد الدراسة ، وتستخدم الطريقة هذه لدراسة العلاقة السببية أي المسبب والتأثير، عن طريق التحكم في العوامل الداخلة في التجربة لدراسة تأثيرها منفردة أو مجتمعة. مثلا عند دراسة تأثير نوع معين ومستويات من السماد على انتاج محصول معين مع تثبيت العوامل الأخرى اللازمة للإنتاج المحصول أو تغيير بعضها كصنف البذور وطريقة الزراعة وعدد الريات ... الخ، وتعتبر الطريقة التجريبية أقوى طرق البحث.

تمرين (2-5)

1. **ما الفرق بين المصادر الأولية والثانوية للبيانات، وأيهما يتصف بالدقة اكثر؟**
2. **ما الاساليب المتبعة في جمع البيانات غير المتوفرة، عددها واشرحها بالتفصيل ؟**
3. **عدد أساليب أخذ العينات، مع مثال لكل اسلوب؟**